od-Nr. 75 www.ndrom.de
obiter dictum 07/2016

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Musiktheorie in den Sieben Freien Künsten

Am Anfang aller musiktheoretischen Überlegungen und Experimente steht das ebenso eigenartige wie einzigartige Phänomen der Oktave, das auf folgende Weise körperlich erfahrbar wird. Wenn Frauen und Männer miteinander dieselbe Melodie singen, hören wir von Ton zu Ton zwei Stimmen, eine hohe und eine tiefere, und dennoch singen alle gemeinsam »einstimmig«. Dies macht eine Oktave aus.

Bei Experimenten, etwa mit einer gespannten Saite – die Versuchsanordnung hierfür heißt Monochord –, stellt sich heraus, daß sich die Schwingungszahlen zweier Töne, die den Klang einer Oktave abgeben, um den Faktor 2 unterscheiden. Nehmen wir den tieferen Ton als Grundton mit $\{f_0\}$ Schwingungen in der Sekunde, so schwingt der Ton, der mit dem Grundton die Oktave erzeugt, mit doppelter Schwingungszahl, d. h. mit der Frequenz $2 \cdot f_0$. Verdoppeln wir dessen Schwingungszahl noch einmal, entsteht zum Grundton die Doppeloktave mit $4 \cdot f_0$. Um diesen Sachverhalt im Notenbild darzustellen, wählen wir im Violinschlüssel als Grundton ein G (s. Abb. 1).

Um die so erzeugte Tonreihe zu vervollkommnen, stellt sich die Frage, wie der Ton mit dreifacher Schwingungszahl einzuordnen ist. Dieser liegt, wie zu erwarten war, zwischen der Oktave und der Doppeloktave und ist ein d (s. Abb. 2). Mithin hat sich eine durchnummerierte Tonfolge ergeben, bestehend aus dem Grundton und seinen ersten drei Obertönen.

Aus diesen vier Tönen lassen sich sechs Paare zum Erklingen bringen. Jedes von diesen ist ein Tonintervall mit eigenem Namen. Und zu jedem läßt sich das Verhältnis der beteiligten Schwingungszahlen angeben (s. Tabelle).

Tabelle: Tonintervalle mit den ersten drei Obertönen.

Intervall	Name	Schwingungsverhältnis
G - g	Oktave	2:1
G - d	Duodezime	3:1
G - g'	Doppeloktave	4:1
g - d	Quinte	3:2
g - g'	Oktave	4:2 = 2:1
d - g'	Quarte	4:3

Aus Abbildung 2 geht hervor, daß sich größere Intervalle aus kleineren zusammensetzen lassen, wie etwa die Oktave aus Quinte und Quarte oder die Duodezime aus Oktave und Quinte, wie

(g-d) + (d-g') = g-g' (1)
(G-g) + (g-d) = G-d . (2)

Diese Sachverhalte lassen sich aber auch mit Schwingungsverhältnissen beschreiben. Hierbei gilt folgende Regel:

- Der additiven Verknüpfung zweier Tonintervalle entspricht die Multiplikation ihrer Schwingungsverhältnisse.
- Der Differenz zweier Intervalle ist der Quotient der beteiligten Schwingungsverhältnisse adäquat.

Folglich gehört zu (1) die Rechnung

$(3:2) \cdot (4:3) = 3/2 \cdot 4/3 = 2:1$ (Oktave)

und zu (2) die Rechnung

$(2:1) \cdot (3:2) = 2/1 \cdot 3/2 = 3:1$ (Duodezime).

Den Schrägstrich denke man als Bruchstrich, und man kürze die Brüche, wo es möglich ist.

Im Beispiel für den zweiten Teil der Regel bilden wir aus Quinte und Quarte den Ganzton.

$(3:2) / (4:3) = 3/2 \cdot 3/4 = 9:8$

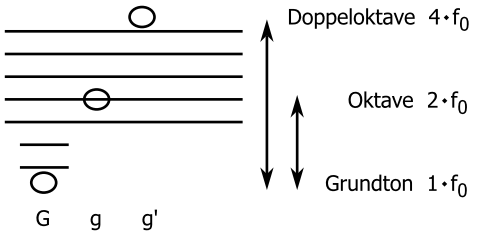

Abb. 1: Zwei Oktaven (G-g, g-g') und eine Doppeloktave (G-g').

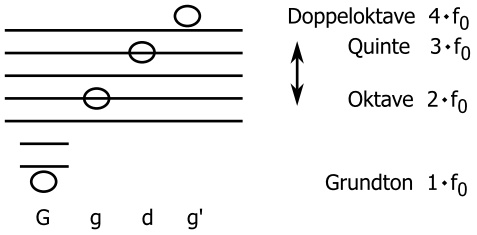

Abb. 2: Zwei Oktaven (G-g, g-g'), eine Doppeloktave (G-g'), eine Quinte (g-d) und eine Quarte (d-g') sowie eine Duodezime (G-d).

(Zur Erinnerung: Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.)

Die bis hierher ausgebreiteten Sachverhalte waren bereits in der Antike bekannt. Die Pythagoräer faßten diese in der Zahlenfolge » 1 2 3 4 « zusammen, die sie für ein universell wirksames Gesetz hielten. Es trägt die Bezeichnung Tetraktys (griech. Vierheit, Vierergruppe). Wir bezeichnen die pythagoräische Tetraktys als »Hauptsatz« der antiken Musiktheorie.

Es gibt noch eine andere Fassung der Tetraktys, die der Philosoph, Mathematiker und Musiktheoretiker Nikomachos von Gerasa – er lebte vermutlich in der Kaiserzeit – als die »erste« bezeichnet. Diese hat die Gestalt » 6 8 9 12 «, wobei es sich hierin um die Nummern weitere Obertöne handelt. Abbildung 3 veranschaulicht das dieser Tetraktys innewohnende Intervallgefüge.

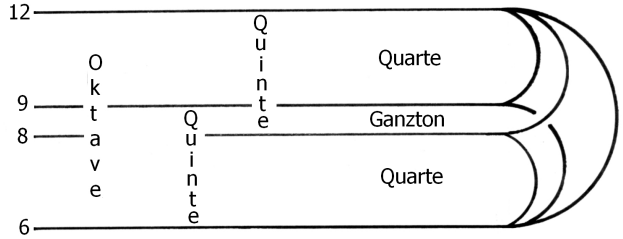

Abb. 3: Grafische Darstellung der Intervalle und deren Zusammenhänge bei der Tetraktys » 6 8 9 12 «.

Aus Abbildung 3 gehen zwei neue Sachverhalte hervor.

_Zwei Quarten und ein Ganzton fügen sich zu einer Oktave.

_Zwei Quinten setzen sich zu einem Intervall zusammen, das um den Ganzton größer ist als die Oktave.

Die entsprechenden Rechnungen führe der Leser selbst aus.

Aus der philosophischen Fassung » 1 2 3 4 « der Tetraktys ergibt sich, wenn wir die vier Zahlen addieren, Zehn.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Diese zahlentheoretische Eigenschaft der ersten vier Zahlen ist beeindruckend und wertet die pythagoräische Konsonanzlehre zudem auch noch arithmetisch auf. Unübersehbar ist ferner der geometrische Aspekt der Tetraktys, der in ihrer Darstellung als gleichseitiges Dreieck (s. Abb. 4) hervortritt. Hierdurch ergab sich in der christlichen Religion die Möglichkeit, auf die Tetraktys Glaubensinhalte zu projizieren, die mit der Dreizahl verbunden werden können, wie etwa die Trinität.

I
I I
I I I
I I I I

Abb. 4 : Die Darstellung der Zehn als Dreieckszahl.

In der didaktischen Variante » 6 8 9 12 « der Tetraktys erscheint das Schwingungsverhältnis 9:8 des Ganztones explizit. Oktave 12:6 = 2:1 und Ganzton 9:8 treten hier gemeinsam hervor. Diese Qualität gewann für die christliche Symbolik an Bedeutung. Ein Beispiel mag dies belegen. „Octavus sanctos omnes docet esse beatos". Dieser Satz befindet sich im 11. Jh. auf den Kapitellen der Abteikirche zu Cluny und verkündet „Die Oktave lehrt alle Heiligen, glückselig zu sein".

Die Eigenschaft von $8 = 2^3$ und $9 = 3^2$, Potenz von 2 bzw. 3 zu sein, eröffnete die Möglichkeit, auch den Ganzton symbolisch mit der dreifaltigen Gottheit zu verbinden. Der Augustiner Gernot von Rechersberg bemerkte hierüber: „Die Acht, als erste Kubikzahl, prägt dem Menschen in Leib und Seele die Sicherheit der ewigen Seligkeit ein."[1]

Diese musiktheoretischen Grundlagen sind Wissensinhalte des Quadriviums, das sich in Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie untergliedert. Trivium (Grammatik, Rhetorik, Dialektik) und Quadrivium bilden die Sieben Freien Künste (septem artes liberales), die an den Kloster- und Domschulen des Mittelalters gelehrt wurden. Hier erwarben auch die Werkmeister ihre »wissenschaftliche« Bildung.

Wie sich das antike Wissen im Mittelalter zum Quadrivium formte, läßt sich am Wirken von (mindestens) vier Persönlichkeiten darstellen.

_Pythagoras (um 570-510) schöpfte die Erkenntnisse;
_Philolaos (470-390) hielt das pythagoräische Gedankengut schriftlich fest;
_Aristoteles (384-322) kommentierte die Weltsicht der Pythagoräer;
_Boethius (480/485-um 525) studierte und verarbeitete das antike Wissen, formatierte dies zum Quadrivium;
_Gerbert von Reims (ca. 950-1003, von 999 an Papst Sylvester II.) lehrte die Fächer des Quadriviums an der Domschule zu Reims.[2,3]

Auf diesem Wege fanden die musiktheoretischen Erkenntnisse aus dem Quadrivium Eingang in die romanische Kirchenarchitektur, wo diese konzeptbildend wirkten. Mithin bestimmen sie einerseits die ästhetische Qualität des jeweiligen Bauwerks und transportieren andererseits dessen christlichen Symbolgehalt.

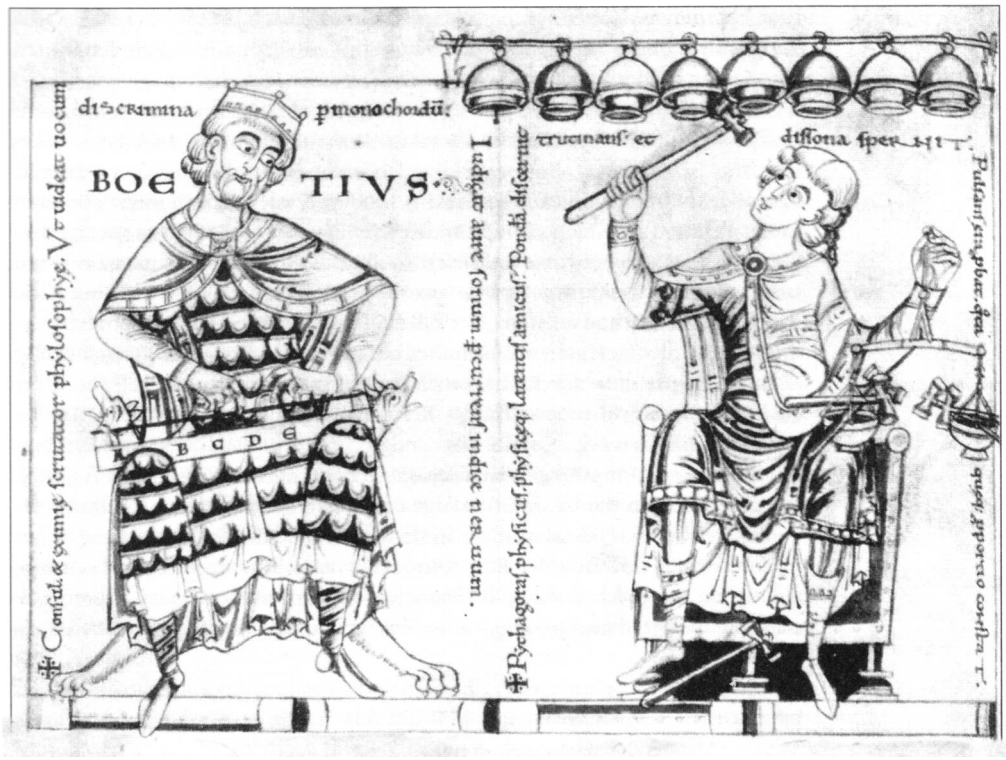

Abb. 5: Boethius reißt die Saite eines Monochords an. Pythagoras experimentiert mit Glöckchen.
(Miniatur, Handschrift aus Canterbury, um 1150)

[1] Werlitz, Jürgen (2003), Das Geheimnis der heiligen Zahlen, Wiesbaden, S. 280.
[2] Bodenstein, Hans-Peter (2007), Sieben – Drei, Vier. Über die sensorischen und numerischen Grundlagen der Zahlensymbolik, Seehausen (Altmark).
[3] Lindgren, Uta (1991), Gerbert von Reims und die Lehre des Quadriviums, S. 291 ff., in: Euw, Anton von/Schreiner, Peter (Hg.), Kaiserin Theophanu, Bd. 2, Köln.