Vormetrische Längeneinheiten – der Weg zurück

od-Nr. 50 www.ndrom.de
obiter dictum 11/2013

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Wir denken im Dezimalsystem und handhaben das Internationale Einheitensystem (SI), das auf Meter, Gramm, Sekunde, Ampere, Kelvin und Candela basiert, mit einiger Selbstverständlichkeit. Einheitenvorsätze, wie Mega, Kilo, Dezi, Zenti und Milli sind uns geläufig. Andererseits teilen wir den Vollkreis in 360°, den Tag in 24 Stunden und die Stunde in 60 Minuten. Offensichtlich liegt hier keine Unterteilung nach Zehnerpotenzen vor. Hier berühren sich Denkgewohnheiten aus der Antike und der Neuzeit.

Strukturuntersuchungen an Bauwerken romanischer Architektur erfordern die Wahrnehmung moderner Nachmessungen in vormetrischen Längeneinheiten. Hierzu müssen wir einerseits deren (Unter-)Gliederung kennen und andererseits deren Umrechnung in die Einheit Meter bewerkstelligen.

$L = \{L\}\cdot[L]$, L ... Länge
{L} ... Maßzahl der Länge
[L] ... Maßeinheit der Länge

Obwohl sich {L} aus Nachmessungen mit metrischen Meßwerkzeugen im allgemeinen als gebrochenrational erweist, verbirgt sich dahinter sehr häufig das ganzzahlige Vielfache einer mittelalterlichen Längeneinheit. {L*} war im ursprünglichen Entwurfszusammenhang in der Regel ganzzahlig, das heißt eine natürliche Zahl. Dafür sprechen menschliche Bequemlichkeit und Zahlsymbolik, die ausschließlich mit natürlichen Zahlen verbunden ist.

Beispiel: Apsisradius r = 16 pes.rö (... römischer Fuß)
≈ 4.74 m

Die im Heiligen Römischen Reich Deutscher Nation (HRR) verwendeten Längeneinheiten entstammen im wesentlichen der Römerzeit, was kulturgeschichtlich durchaus verständlich ist.[1] Die beiden kleinsten Einheiten sind uncia (einen Damen breit) und digitus (einen Finger breit). Beide gehen in der Basiseinheit palmus (eine Hand breit) auf.

1 palmus = 3 uncia (Relation 1)
1 palmus = 4 digitus (Relation 2)

Diese beiden Relationen erscheinen uns rätselhaft. Weshalb gerade die natürlichen Zahlen 3 und 4 und keine anderen Zahlen? Die Antwort lautet: Diese beiden Relationen sind von der pythagoräischen Tetraktys ableitbar (s. Abb. 1 und Abb. 2).

In der Zahlenfolge 1 2 3 4 stehen die ersten vier natürlichen Zahlen beieinander mit den grundlegenden Zahleneigenschaften:

- 1 ist eine Eigenschaft aller Zahlen; Zahl : Zahl = 1.
- 2 ist eine gerade und eine Primzahl.
- 3 ist eine ungerade Zahl und eine Primzahl.
- 4 ist die zweite gerade Zahl und die erste Quadratzahl.
- Die Summe der vier Zahlen ist 10, Basis des Dezimalsystems (s. o.).
- Das Produkt der vier Zahlen ist 24, die zweifache Basis des Duodezimalsystems (s. o.).
- Die sechs Quotienten sind Schwingungsverhältnisse der konsonanten (harmonischen) Intervalle.

1:2 ... Oktave, 1:3 ... Duodezime, 1:4 ... Doppelokt.,
2:3 ... Quinte, 2:4 = 1:2 ... Oktave,
3:4 ... Quarte.

In diesem Lichte erscheinen die erste und die zweite Relation wohlbegründet, gewissermaßen »weltanschaulich« fundiert. Doch erweisen sie sich auch im Meßwesen als praktikabel. Solange {L} durch 2, 3 oder 4 teilbar ist, lassen sich Halbe, Drittel und Viertel von L leicht ausrechnen.

Beispiel: L = 12 palmus
L : 3 = 12:3 palmus = 4 palmus

Basiszahl	Tetraktys	Dreieckszahl
1	•	1
2	• •	3
3	• • •	6
4	• • • •	10

1 : 2 : 3 : 4

Abb. 1: Tetraktys 1 + 2 + 3 + 4 = 10
Heiliges Emblem und Weltformel der Pythagoräer.

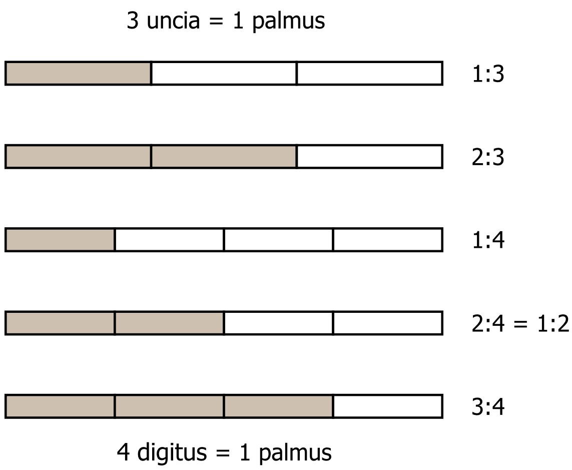

Abb. 2: Die Zusammenfassung der Verhältnisse aus Teil und Ganzem führt auf die Tetraktys in der Darstellung 1 : 2 : 3 : 4.

Ist L nicht durch 2, 3 oder 4 teilbar, gelingt das Teilen dennoch auf elegante Weise, weil »palmus« (stets) durch 3 und 4 teilbar ist.

Beispiel: L = 13 palmus
L : 3 = 13 palmus :3 = 13 uncia
L : 4 = 13 palmus :4 = 13 digitus

Im Vermessungswesen machen sich noch längere Einheiten als palmus erforderlich. Deshalb erfuhr das Einheitensystem diese Erweiterungen (s. Abb. 3):

1 dodrans = 3 palmus

dodrans (auch sexta) ... Dreiviertel

1 pes = 4 palmus; pes ... Fuß

Klafter und große Elle sind mittelalterliche Ergänzungen aus dem deutschsprachigen Raum, in dem cubitus auch als kleine Elle bezeichnet wurde.

1 cubitus = 6 palmus = 1½ pes
1 (große) Elle = 8 palmus = 2 pes

In der nächsthöheren Ebene treten passus (Doppelschritt) und Klafter auf (s. Abb. 3).

1 passus = 5 pes
1 Klafter = 6 pes

Im Mittelalter benutzte man aber auch Klafter zu 8 und 12 Fuß.

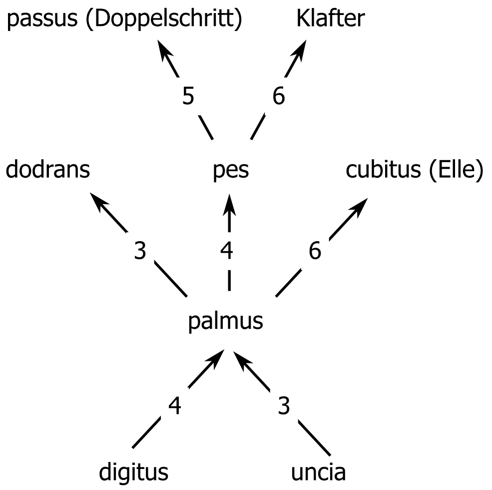

Abb. 3: Vormetrische Längeneinheiten, (römische) Auswahl.

Während sich uns, was die Bildung und Vervielfachung der Einheit palmus anbetrifft, ein überschaubares Bild darbietet, besteht über dessen absolute Länge im Einzelfalle, vorsichtig ausgedrückt, Unsicherheit. Die Zahl der unterschiedlichen Fußmaße ist riesig. Bis auf wenige Ausnahmen betrug ihre Länge je nach Region zwischen 20 und 35 Zentimeter. In seiner Arbeit benutzt der Verfasser bisher vier verschiedene Fußmaße als Stützwerte (s. Tabelle). Mit diesen ist das in romanischer Zeit mögliche Wertespektrum in etwa abgedeckt.

Tabelle: Vom Verfasser benutzte Fußmaße.

Fuß	Stützwert pes/m	Differenz d. Stützwerte 2•p/m	Fußintervalle pes - p ; pes + p
karolingisch pes.ka	0.333	0.010 = 0.333-0.323	0.3285 ; 0.3375
eltenisch pes.el[2,3]	0.323	0.018 = 0.323-0.305	0.3185 ; 0.3275
staufisch pes.st	0.305	0.009 = 0.305-0.296	0.3005 ; 0.3095
römisch pes.rö	0.296		0.2915 ; 0.3005

Wie können wir die am konkreten Kirchenbauwerk verwendeten Fußmaße herausfinden? Da wir, abgesehen von den vier genannten Füßen, nicht wissen, wonach wir suchen müssen, ist die Frage nur eingeschränkt zu beantworten. Deshalb »quantisieren« wir das Wertespektrum mit Hilfe der Stützwerte derart, daß eine Intervall-Struktur entsteht, mit der sich in der Praxis etwas anfangen läßt. Folgende Überlegungen führen zum Ziel.

Wir geben die Stützwerte (Fußmaße) in Meter an (s. Tabelle). Diese stehen in der Mitte eines Werteintervalls, das 2p breit ist. Das Intervall um den jeweiligen Stützwert ist dann

(pes-p; pes+p).

In Maßanalysen ermittelte Längeneinheiten [L*], die die Bedingung

pes - p < [L*] < pes + p

erfüllen, sind demzufolge Repräsentanten des jeweiligen Fußmaßes und würden mithin im Fortgang der Erkundungen durch den Stützwert pes des Intervalls ersetzt. Letztendlich gelingt es auf diese Weise zwischen den vier möglichen Fußmaßen, die wir ausgewählt haben, zu unterscheiden.

Zwei Fragen sind bisher unbehandelt geblieben.
- Wie kommen wir zu p?
- Wie erhalten wir eine Länge, die einem Eignungstest als Fußrepräsentant unterzogen werden kann?

Was p anbetrifft.

Wir ordnen die vier bekannten Fußmaße der Größe nach (s. Tabelle, Spalte 2). Die Differenz zweier benachbarter Fußmaße ist 2•p (s. Tabelle, Spalte 3). Die Differenz von Elten- und Stauferfuß ist doppelt so groß wie die übrigen. Deshalb passen wir dazwischen einen hypothetischen Fuß ein: pes.hy = 0.314 m. Dieser ist dem sog. Rheinfuß, der 0.31385 m mißt, nicht unähnlich.

p ist definitionsgemäß die halbe Differenz benachbarter Stützwerte, woraus sich p = 0.0045 m ergibt. In der letzten Spalte der Tabelle stehen die hiermit gebildeten Fußintervalle. Für den hypothetischen Fuß lautet dieses

(0.3095; 0.3185) mit pes.hy = 0.314 m.

Mit p liegt zugleich der relative Fehler bzw. die relative Abweichung des Fußrepräsentanten [L*] fest, der bei allen Operationen zu seiner Gewinnung summa summarum nicht überschritten werden darf. Wir definieren:

Δp = ± (p /pes.el)•100% = ±1.4%

und fordern stets

|Δ[L*]| < |Δp|.

Δ[L*] setzt sich aus modernen Meß- und Rundungsfehlern zusammen sowie aus den Fehlern, die bei der praktischen Bauausführung entstanden sind, als Maße aus dem Entwurf in das Mauerwerk übertragen worden sind.

Fazit

Auf der Grundlage dieser Überlegungen ergibt sich eine Möglichkeit für die Umrechnung der am Kirchenbau nachgemessenen Längen in vormetrische Einheiten. Da die entworfene Fußskale einer gewissen definitorischen Willkür nicht entbehrt, taugt das auf ihr arbeitende Verfahren (Algorithmus) nicht dazu, bestimmte (andere) historische Fußmaße zu identifizieren.

Was [L*] anbetrifft.

Wie kommen wir zu einem Fußrepräsentanten?

Die folgenden Ausführungen umreißen den Algorithmus, der auf der Fußskale arbeitet.

Gegeben sei eine am Bauwerk nachgemessene Strecke in der Einheit Meter.

L = {L}•[L], Beispiel: L = 4.25 m

{L} = 4.25 ... Maßzahl in Gestalt einer rationalen Zahl.

[L] = m ... Maßeinheit m.

Das gegebene Maß erfährt eine »äquivalente« Umformung in

L = {L*}•[L*], Beispiel: L = 14•0.3036 m.

{L*} = 14 ... Maßzahl in Gestalt einer natürlichen Zahl.

[L*] = 0.3036 m ... Maßeinheit Fuß, vorerst nur ein möglicher Fußrepräsentant.

Die »äquivalente« Umformung erledigen Rechenprogramme, die der Verfasser auf seiner Romanik-Projektseite ndRom zur Verfügung stellt, wo auch die Algorithmen und Benutzungshinweise besprochen werden.[4]

Die weiteren zwingend erforderlichen Überlegungen erörtern wir am oben gewählten Zahlenbeispiel. Zu klären ist: Für welchen Fuß ist [L*] = 0.3036 m ein Repräsentant, und erfüllt sein relativer Fehler die Bedingung |Δ[L*]| < 1.4%? Mit Blick auf die Tabelle erkennen wir 0.3036 m als Repräsentant des Stauferfußes. Seine Abweichung auf den Stützwert ist kleiner als 0.5%.

100%•(0.305 m - 0.3036 m) : 0.305 m = 0.459%

Liegen die übrigen Fehler des Repräsentanten unter 0.941%, so dürfen wir diesen durch die Fußeinheit pes.st ersetzen.

L = 14•0.3036 m = 14 pes.st

Ist das Kriterium |Δ[L*]| < 1.4% mit keinem der Stützwerte erreichbar, so ist keines der tabellierten Fußmaße von praktischer Bedeutung. Kommt es aber zu einem Ergebnis, so ist dieses durch weitere Untersuchungen zu bestätigen. Auswertbare Längen ergeben sich auf dreierlei Weise.

• Vermessen von Marken im Stein, die für eine oder mehrere Längeneinheiten ein Eichnormal darstellen. Solche wurden vom jeweiligen Werkmeister hinterlassen.

• Vermessen von Längen am Bau, wie den Achsabständen von Fenstern und Stützen oder die lichten Weiten von Portalen, Arkaden, dem Triumphbogen usf.

• Ermitteln (messen und rechnen) von gemeinsamen Längen (Module), die als ganzzahlige Vielfache in konstruktiv verknüpften Streckenpaaren, wie etwa in den Seiten des Grundrechtecks, enthalten sind.

Erkenntnisse aus gemeinsamen Maßen liefern starke Argumente für oder gegen die Annahme eines bestimmten Fußes. Im Idealfalle führen alle drei Quellen zu demselben Fußmaß.

Die Einheit [L*] kann selbstverständlich auch darauf getestet werden, ob sie dodrans, cubitus, palmus, uncia oder digitus repräsentiert. Entsprechende Software hilft dabei.

Baumaß und Maßverhältnis

a und b seien zwei Längen am romanischen Kirchenbau, deren Darstellungen aus einer äquivalenten Umformung, wie sie oben beschrieben worden ist, hervorgegangen sind. Diese können deshalb folgenden Voraussetzungen genügen:

V1: Die Maßeinheiten sind vormetrisch und gleich. [a] = [b]

V2: Die Maßzahlen {a} und {b} sind natürliche Zahlen.

Ferner können {a} und {b} einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler t besitzen.

1. Fall: Es existiert ein gemeinsamer Teiler.

Dies bedeutet

$$\{a\} = i \cdot t \quad \text{und} \quad \{b\} = j \cdot t,$$

i, j, t sind natürliche Zahlen mit der Konsequenz

$$a = i \cdot t \cdot [a] \quad \text{und} \quad b = j \cdot t \cdot [b]$$

und wegen V1

$$t \cdot [a] = t \cdot [b] = g.$$

Diese Länge g ist das gemeinsame Maß von a und b.

Bezüglich g sind a und b kommensurabel.

In diesem Falle ist a : b = i : j das Maßverhältnis der Längen bezüglich g.

2. Fall: Es existiert kein gemeinsamer Teiler.

Dies bedeutet unter Beachtung von V1

$$a : b = \{a\} : \{b\}.$$

Gemeinsame Maße sind häufig Baumaße, die mit Verhältniszahlen einhergehen, die ihrerseits ein Bauwerk oder Teile von ihm in bestimmter Weise proportionieren und mit Symbolik beleben. In beidem wurden die geistigen Väter einer romanischen Kirche ihren hohen ästhetischen und geistlichen Ansprüchen – bauen zur Ehre Gottes – gerecht. Deren Intentionen zu entdecken, ist das Ziel von »äquivalenten Umformungen«.

Beispiele

Zu Marken im Stein:

Im Ostsegment der Apsis der Schönhausener Basilika[5] ist auf dem Backsteinmauerwerk ein Kreis eingeritzt. Sein Durchmesser mißt D = (0.268 ±0.002) m. Dem entspricht ein relativer Meßfehler von 0.75%. Die äquivalente Umformung ergibt

D = 10 uncia.el   bzw.   D = 14 digitus.st.

Die Abweichung vom jeweiligen Stützwert beträgt 0.38%, summa summarum 1.13% < 1.4%. Das Kriterium ist eingehalten.

Zu Längen am Bau:

Der Achsabstand der Arkadenstützen beträgt senkrecht zur Mittelschiffsachse AkY = 8.75 m. Die Umformung ergibt hier AkY = 28 pes.st mit der relativen Abweichung 0.36% vom Stützwert. Die Maßzahl 28 ist eine natürliche Zahl und als Produkt 4•7 symbolträchtig.

Zu gemeinsamen Maßen:

Die Schönhausener Basilika ist

BwX = 43.19 m lang   und   BwY = 17.66 m

breit. Die beiden Maße verhalten sich wie i : j = 5:2 bezüglich des gemeinsamen Maßes g = 8.73 m. Die äquivalente Umformung des gemeinsamen Maßes ergibt g = 27 pes.el mit der Abweichung vom Stützwert von 0.13%. 5•g weicht um 0.95% von BwX ab und 2•g um 1.25% von BwY. Addieren wir zu diesen beiden Fehlern 0.13%, so sind beide Fehlersummen kleiner als das Kriterium 1.4%.

Nun erst wird eine Interpretation des Baumaßes g möglich. $27 = 3^3$ ist vermöge seiner zahlentheoretischen Eigenschaft Symbolträger, ebenso wie das Zahlenverhältnis 5:2, das einen Fibonacci-Quotienten[6] zweiter Art darstellt. Ohne äquivalente Umformung wären diese bemerkenswerten Eigenschaften der Schönhausener Kirchenarchitektur unentdeckt geblieben.

---

[1] Migne Patrologiae cursus completus, Series latina 39. Gerberti postmodum Sylvestri papae II operum pars prima. De disciplinis mathematicis, zitiert in: Beseler, Hartwig / Roggenkamp, Hans (1954), Die Michaelskirche in Hildesheim, Berlin, S. 126.

[2] Bodenstein, Hans-Peter (2009), Mittelalterliche Längeneinheiten im romanischen Kirchenbau in der Altmark, in: Obiter dictum, od-Nr. 5, www.ndrom.de.

[3] Bodenstein, Hans-Peter (2007), Die Möllenbeck-Hochelten-Story, Über die Herkunft und die Verwendung eines Fußmaßes im Kleinkirchenbau, Seehausen (Altmark).

[4] www.ndrom.de, unter: Kirchen-DB / unter: Werkzeuge / unter: »ME-R Aufruf« bzw. »MV-R Aufruf«

[5] Bodenstein, Hans-Peter (2013), Querhauslose Basiliken. Untersuchung der Grundrisse, Seehausen (Altmark), S. 20 ff.

[6] Bodenstein, Hans-Peter (2012), Visualisierung einer Annäherung, in: Obiter dictum, od-Nr. 30, www.ndrom.de.