Grundriß des Havelberger Doms

od-Nr. 47 www.ndrom.de
obiter dictum 07/2013

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Der Havelberger Dom wurde nach zwanzigjähriger Bauzeit am 16. August 1170 geweiht. Das formale Konzept, dem die Konstruktion des Grundrisses folgt, soll hier aufgedeckt werden.

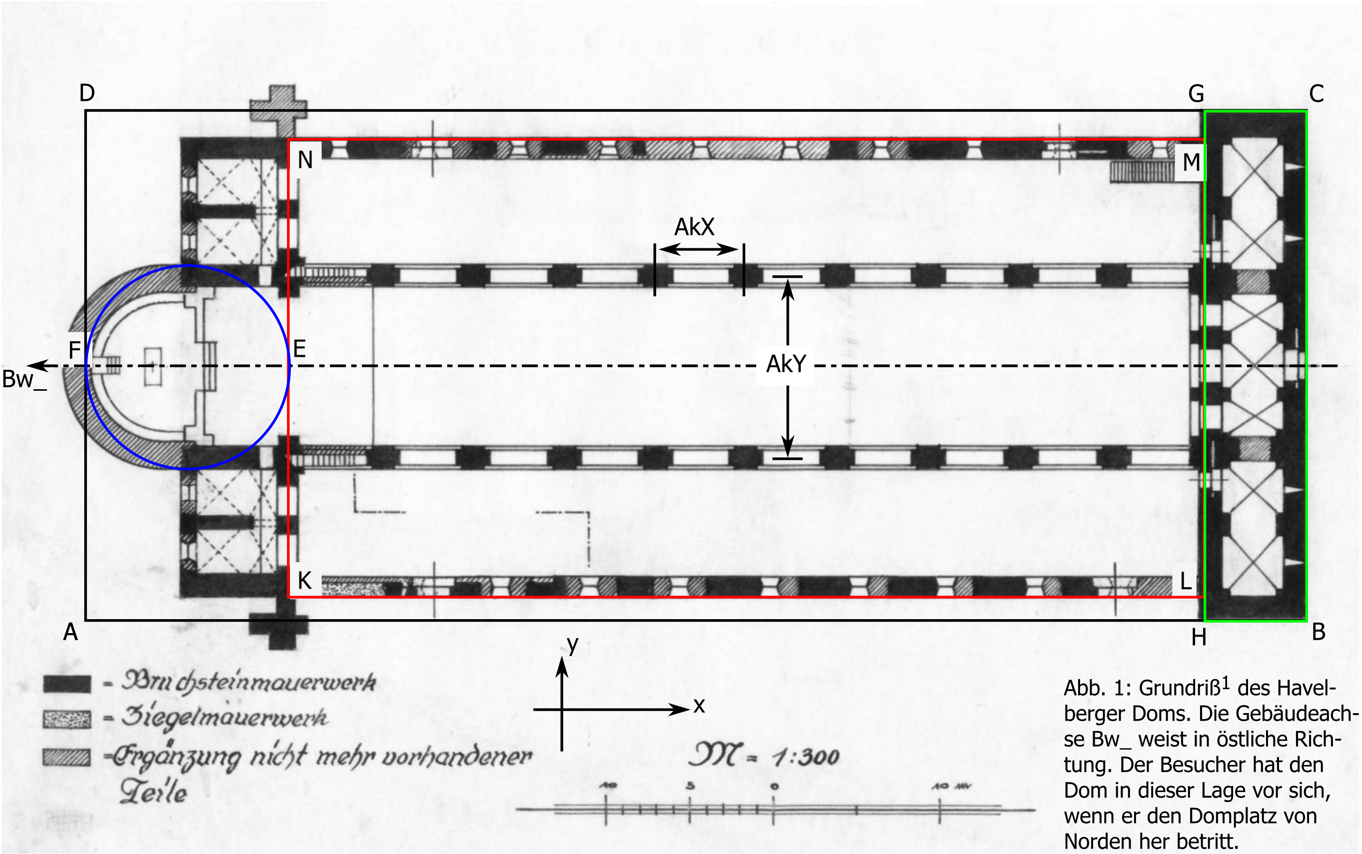

Abb. 1: Grundriß[1] des Havelberger Doms. Die Gebäudeachse Bw_ weist in östliche Richtung. Der Besucher hat den Dom in dieser Lage vor sich, wenn er den Domplatz von Norden her betritt.

Pfeilerstellung im Langhaus

Die hierüber getroffenen Aussagen beziehen sich auf die Schnittpunkte der vertikalen Pfeilerachsen mit der Grundebene. Die einfachen Achsabstände lauten (s. Abb. 1):

$$AkX \approx \hat{a} = 18 \text{ pes.st} \quad \text{und} \quad AkY \approx \hat{e} = 36 \text{ pes.st},$$

wobei

$$1 \text{ pes.st} = 0.305 \text{ m} \quad \text{(Stauferfuß)}.$$

Hieraus folgt zweierlei.
Das Grundmaß der Arkatur, der Arkaturmodul, beträgt

$$\hat{a} = 18 \text{ pes.st}$$

und das Maßverhältnis

$$\hat{e} : \hat{a} = 2:1\,,$$

was einer Oktave entspricht. Die Zerlegung der Maßzahl des Arkaturmoduls in elementare Symbolzahlen lautet

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Das Langhaus selbst

Das Grundrechteck KLMN (rot) umfaßt das Langhaus. Dessen Seiten sind als ganzzahlige Vielfache des Arkaturmoduls darstellbar.

$$LhX \approx KL = 10 \cdot \hat{a} = 180 \text{ pes.st}$$
$$LhY \approx LM = 5 \cdot \hat{a} = 90 \text{ pes.st}$$

Hiermit entspricht auch

$$LhX : LhY \approx 2:1$$

einer Oktave. In diesem Zusammenhang tritt die Symbolzahl 5 hinzu.

Das ganze Bauwerk

Den Grundriß als Ganzes beschreiben wir mit dem Grundrechteck ABCD (schwarz). Über diesem liegt am Westende das Turm-Rechteck BCGH (grün), das die Breite des Bauwerks bestimmt.

$$BwY = TuY \approx BC = 100 \text{ pes.st}$$

Wie sich noch herausstellen wird, ist es sinnvoll, die Bauwerkslänge durch 240 pes.st zu approximieren. Ein Kriterium hierfür wird das Maß von EF sein.

$$BwX \approx AB = 240 \text{ pes}$$

Aus diesen beiden Maßen folgt das Grundverhältnis

$$BwX : BwY \approx AB : BC = 12:5$$

bezüglich

$$g = 20 \text{ pes.st},$$
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

g nennen wir das Grundmaß des Bauwerks. Bisher kommen wir immer noch mit den drei heiligen Symbolzahlen 2, 3 und 5 aus, um den Grundriß zu modellieren.

Das Sanktuarium

Im Grundrechteck ABCD bleibt der Streifen über EF dem Sanktuarium vorbehalten. EF folgt aus

$$EF \approx BwX - (LhX + TuX).$$

Nachzutragen bleibt die Turmlänge

$$TuX \approx GC = 20 \text{ pes.st} = g$$

und die Relation zwischen den beiden elementaren Maßen $\hat{a}$ und g.

$$10 \cdot \hat{a} = 9 \cdot g$$

Jetzt können wir rechnen

$$\begin{aligned} EF &= 12 \cdot g - (10 \cdot \hat{a} + g) \\ &= 12 \cdot g - (\ 9 \cdot g + g) \\ &= 2 \cdot g \end{aligned}$$

Hieraus erschließen wir letztlich noch den Radius r der nicht mehr vorhandenen Apsis (s. Abb. 1 u. Abb. 2, blauer Kreis).

$$r = EF/2 = g$$

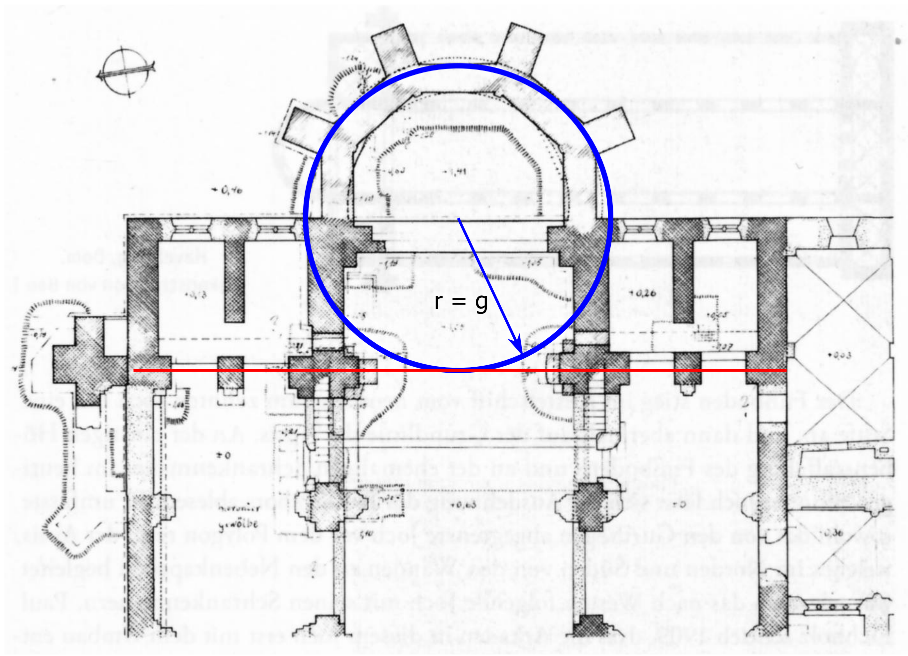

Abb. 2: Grundriß[2] der Ostteile mit Rekonstruktion der romanischen Apsiskrümmung (blau). Das polygonle Chorhaupt erhielt der Dom zwischen 1279 und 1330.

Der Trumvorsprung

Selbstredend findet auch der Turmvorsprung v in diesem Konzept seine Begründung:

$$v = (BwY - LhY)/2 \approx (5 \cdot g - 5 \cdot \hat{a})/2$$
$$\approx (100 \text{ pes.st} - 90 \text{ pes.st})/2$$
$$\approx 5 \text{ pes.st}$$

In Y-Richtung beherrscht die 5 das Geschehen.

Die Eineindeutigkeit von g

Wir wollen abschließend noch zeigen, daß das Grundmaß g = 20 pes in logischer Konsequenz aus den frei gewählten Anfangsbedingungen folgt. Mit anderen Worten: Die Maßzahl 20 ist die einzige sinnvolle Lösung und keine andere.

Obwohl alles mit allem zusammenhängt, versuchen wir uns vorzustellen, wie bei dem Entwurf des Grundrisses vorgegangen wurde. Es mußten Festlegungen getroffen werden:
F1, den Achsabstand der Arkadenpfeiler zu â = 18 pes.st.
F2, die Zahl der Arkadenbögen zu k = 10.
F3, den Abstand der beiden Arkadengrundlinien zu AkY ≈ 2•â.
F4, die Breite des Langhauses zu LhY ≈ 5•â.
Aus F1 und F2 resultiert die Länge des Langhauses.
R1, LhX ≈ 10•â = 180 pes.st.

Noch fehlen im Entwurf die Ostteile und der Westturm. Erst mit diesen ergeben sich Länge und Breite des Bauwerks bzw. Zahlen für dessen Grundrechteck in Gestalt von BwX ≈ i•g und BwY ≈ j•g, wobei es sich bei i und j um natürliche Zahlen handelt. g muß nach Lage der Dinge folgende Bedingungen erfüllen, die den Charakter von Festlegungen haben.
F5, g sei nicht wie â.
F6, die Maßzahl von g sei wegen R1 ein Teiler von 180.
F7, der Turm sei breiter als das Langhaus. j•g > 5•â.
F8, der Turm stehe möglichst wenig über, d. h. v sei minimal.

Um ein g zu finden, nehmen wir F6 her und betrachten die Teiler von 180. Die sind, zu Paaren geordnet,
(2;90), (3;60), (4;45), (5;36), (6;30), (9;20), (10;18), (12;15), verallgemeinert (n;g).
Wegen F5 kommt das 7te Teilerpaar nicht in Frage.
F7 und F8 erfüllt nur das Paar (9;20).
Probe: Mit j = 5 ist j•20 > 90 erfüllt. Die linke Seite ist um 10 größer als die rechte. Also beträgt v = 5 pes.st.
Erste Gegenprobe mit dem Paar (6;30):
Mit j = 4 ist j•30 > 90. Die linke Seite ist um 30 größer. Also beträgt v ≈ 15 pes.st. – Gegenprobe verworfen.
Zweite Gegenprobe mit dem Paar (12;15):
Mit j = 7 ist j•15 > 90. Die linke Seite ist um 15 größer. Also beträgt v ≈ 7½ pes.st. – Gegenprobe verworfen;
usw.
Ergebnis: g = 20 pes ist die optimale Lösung.
Folglich beträgt die Breite des Grundrechtecks über dem Gesamtbau BwY ≈ 5•20 pes.st.
Das 6te Teilerpaar beschreibt auch die Länge des Langhauses:
LhX ≈ 9•g = 180 pes.st = 10•â
und genügt zugleich dem Maßzusammenhang 9•g = 10•â.

Die beiden letzten Festlegungen sind bekannt. Diese unterliegen keinen arithmetischen Zwängen.
F9, die Turmlänge TuX ≈ g.
F10, die Länge des Sanktuariums EF = 2•g.
Hieraus folgt das abschließende Resultat
R2, das Bauwerk ist BwX ≈ 9•g + g + 2•g = 12•g = 240 pes lang. Mithin ist ein Grundrechteck mit dem Seitenverhältnis bzw. Grundverhältnis i : j = 12:5 entstanden.

Um die Klarheit des mittelalterlichen Zahlenwerks nicht zu trüben, erscheinen hier keine Meterangaben. Der Leser möge die gewünschten Umrechnungen im Bedarfsfalle selbst vornehmen.

---

1 Reichel, Antje / Schmuhl, Boje E. Hans (2010) (Hg.), Der Dom zu Havelberg, Dößel, S. 18.
Anm.: In Abb. 1 ist die Darstellung der nicht mehr vorhandenen Apsis fragwürdig.

2 Hoffmann, Joachim, Zur mittelalterlichen Baugeschichte des Havelberger Domes, in: Leonhard Helten (2012) (Hg.), Der Havelberger Dombau und seine Ausstrahlung, Berlin, S. 79.
Anm.: Hoffman schreibt an dieser Stelle: „Für die Rekonstruktion [der Apsis] müssen wir vielfach auf die Beobachtungen von Baurat Hassenstein zurückgreifen, der 1939 die Fundamente im Ostteil des Domes teilweise freilegen konnte [...]. [...] seit den Untersuchungen Hassensteins [steht] fest, daß der Dom ursprünglich keinen geraden Chorabschluß besaß [...], sondern eine Apsis. Das erkannte er aus einem Fundamentrest außen im Winkel von Polygon und nördlichem Nebenchor [s. Abb. 2]. Auf der Grundlinie der Apsis fand er ein durchgehendes Fundament."

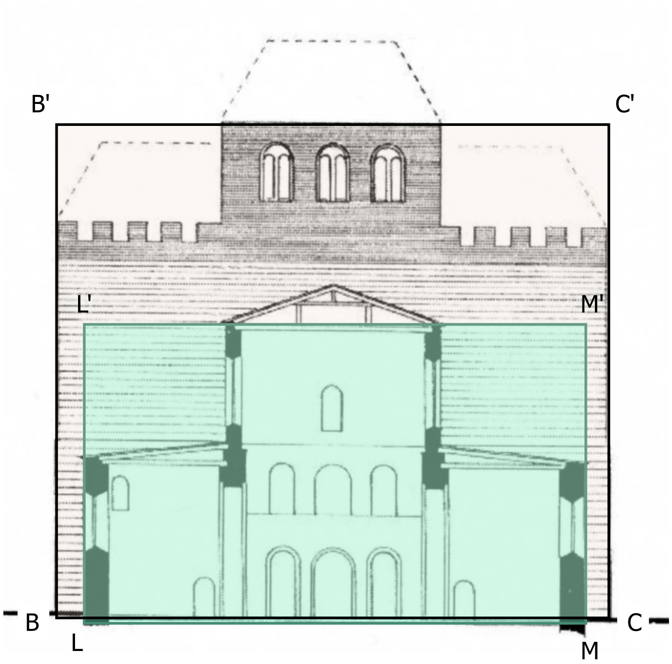

Abb. 3: Darstellubg der Aufrisse von Langhaus und Westwerk mit deren Aufrißecken. Rechteck LMM'L' ist ein Goldenes Rechteck. Das Rechteck BCC'B' verkörpert einen Ganzton.

Aufrisse

So, wie wir einen Grundriß mit dem Grunrechteck einhüllen, verfahren wir mit dem Aufriß entsprechend. Das Rechteck, das hierzu dient, nennen wir ein »Aufrißeck«. Ein Aufrißeck schließt in der Regel das Dachwerk aus. Es reicht folglich nur bis zur Mauerwerkskrone.

Beim Havelberger Dom betrachten wir das Aufrißeck des Langhauses und das des Westwerks. Abbildung 3 veranschaulicht die Situation. Das Aufrißeck des Langhauses erweist sich als Goldenes Rechteck. An der Basis mißt dieses

LhY ≈ LM = 5⋅18 pes.st = 90 pes.st

und in der Höhe

LhZ ≈ LL' = MM' = 3⋅18 pes.st = 54 pes.st.

Mithin stehen die Seiten vom Aufrißeck des Langhauses im Verhältnis

(5⋅18) : (3⋅18) = 5:3.

Die Strecken LM und MM' können als die beiden Teilstrecken der Streckensumme

LM + MM' = 8⋅18 pes.st

aufgefaßt werden.

Hierzu gehört die Schnittrelation

8:5 ≈ 5:3

24 ≈ 25,

die den Goldenen Schnitt in guter Näherung repräsentiert.

Im Gegensatz hierzu verhalten sich die Seiten des Aufrißecks BCC'B' vom Westwerk wie

9:8.

Dieses ist auch das Schwingungsverhältnis der beiden Töne, die einen Ganzton-Schritt bilden.

Im Grundrißentwurf ist die Basis bekanntermaßen

j⋅g = BC = 5⋅20 pes.st
= 100 pes.st
≈ 99 pes.st = 9⋅11 pes.st.

Aus dieser letzten Zeile, einer zweckmäßigen Näherung, die im Rahmen der Bauausführung zu keinen Komplikationen führt, folgt die Höhe der oberen Westwerksmauer wegen 9:8 zu

WwZ ≈ BB' = CC' = 8⋅11 pes.st
= 88 pes.st.

Diese Ergebnisse vermitteln eine Vorstellung davon, wie der Werkmeister beim Entwurf dieses großen Bauwerks vorgegangen sein könnte.

In den Maßverhältnissen der Aufrisse des Langhauses und des Westwerks scheint noch einmal die Genialität des Werkmeisters auf, der seinen Domentwurf aus der Eingansrelation

10 ⋅ â = 9 ⋅ g

heraus mit den Fundamentalmaßen

â = 18 pes.st   und   g = 20 pes.st

entwickelt hat.

Exkurs über die Zehn

Der Bauherr des Havelberger Doms ließ keine kreuzförmige Basilika errichten. Er verzichtete auf die Vierungssymbolik und baute stattdessen ein Langhaus mit zehn Jochen. Es wären ebensogut neun oder acht oder elf Joche möglich gewesen. Weshalb zehn? Worin bestand die Faszination des Bauherrn für die Zehn? Wir können es nicht wissen. Wir kennen aber die zahlentheoretischen Eigenschaften und den Symbolgehalt der Zehn, um die, aller Wahrscheinlich nach, auch Bauherr und Werkmeister wußten. Wir wollen uns diese noch einmal vergegenwärtigen. Hierzu betrachten wir die Eigenschaften der Zehn aus der Perspektive der Sieben Freien Künste (artes liberales) und der christlichen Symbolik.

Arithmetischer Aspekt

Zehn ist die Summe der ersten vier natürlichen Zahlen.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Zehn ist eine gerade Zahl.

_Symbolik

Die Zehn enthält Quelle und Wurzel allen Werdens:

1 – der Urgrund des Seins,
2 – die Polarität der Erscheinungen,
3 – die bewegende dreifache Kraft des Geistes (Trinität oder auch JHWH = Jahwe),
4 – die Anzahl der Elemente und Richtungen der Welt.

Musikalischer Aspekt

In der Tetraktys »1 2 3 4« sind die ersten vier Intervalle der Naturtonreihe enthalten.

2:1 – Oktave (Summe von Quinte und Quarte)
3:2 – Quinte
4:3 – Quarte
9:8 – Ganzton (Differenz von Quinte und Quarte)

_Symbolik

„Octavus sanctos omnes docet esse beatos." (Die Oktave lehrt alle Heiligen, glückselig zu sein. Inschrift auf Kapitellen der Abteikirche zu Cluny, 11. Jh.) Auch die anderen drei Intervalle besitzen eine eigene Harmonie stiftende Wirkung, die körperlich erfahrbar ist.

Geometrischer Aspekt

Die Zehn ist eine Dreieckszahl, das heißt, die Summanden lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck anordnen (s. Abb. 3).

_Symbolik

Mit dem gleichseitigen Dreieck sind die Glaubensinhalte verbunden, für die die Drei steht, insbesondere für Dreigestaltigkeit (Trinität, Glaube – Hoffnung – Liebe, Schöpfung – Erlösung – Vollendung, ...).

Alphabetischer Aspekt

Ein weiterer Gottesbezug ergibt sich im Mittelalter aus der zeichenhaften Darstellung der Zahl 10.

Das römische Zahlzeichen X für 10 erinnert an das Kreuz und den Anfangsbuchstaben von »Xristos«. Das griechische Zahlzeichen für 10 ist I (jota), mit dem das Wort »Jesus« beginnt.

Und vergessen wir nicht, die Zehn ist uns angeboren. Wir können sie an Händen und Füßen abzählen.

Die Gründe, der Zehnzahl seine Aufmerksamkeit zu schenken, ihre Ausdruckstärke in einem Dombau zu verewigen, war naheliegend.

Im Havelberger Dom tritt uns die Zehn aber nicht nur als Anzahl der Joche des Langhauses entgegen. Die 10 steckt auch im Grundmaß. $g = 2 \cdot 10$ pes.st. Hierdurch werden im Grundriß alle Außenmaße des Doms ohne Rest durch 10 teilbar. Selbst der Arkaturmodul ist ein Produkt aus zwei Zahlen, die der Zehn verwandt sind. $\hat{a} = 3 \cdot 6$ pes.st. 3 und 6 sind ebenfalls Dreieckszahlen (s. Abb. 3).

Fazit

Der Havelberger Dom ist ein Zehner-Dom.

$$10 \cdot 2 = [g]\ ;\ \ 10 + 2 = i\ ;\ \ 10 : 2 = j$$

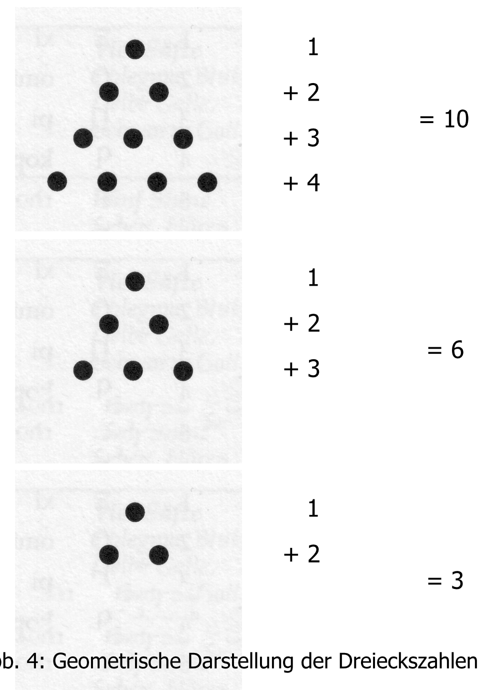

Abb. 4: Geometrische Darstellung der Dreieckszahlen 10, 6 und 3.