

Harmonische Asymmetrie

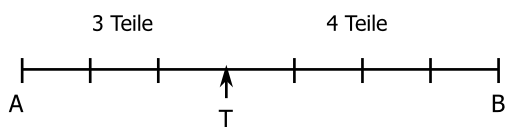
Der Wechsel von Symmetrie und Asymmetrie verleiht auch der romanischen Dorfkirche Lebendigkeit. Deren mit der Gebäudeachse verbundene Spiegelsymmetrie und die asymmetrische Anordnung der Portalachsen auf den Längswänden haben sich uns als charakteristische Harmoniemerkmale bildhaft eingepägt. Hingegen tritt dem Kirchenbesucher die Proportion des Grundrisses weit weniger deutlich ins Bewußtsein.

In den meisten Fällen lassen sich die Asymmetrien auf geometrische oder arithmetische Konzepte zurückföhren, denen Konstruktionsvorschriften und Zahlenverhältnisse in Gestalt echter und unechter Brüche zugrunde liegen. Die Suche nach Kommensurabilität deckt häufig auch mittelalterliche Maßeinheiten auf.

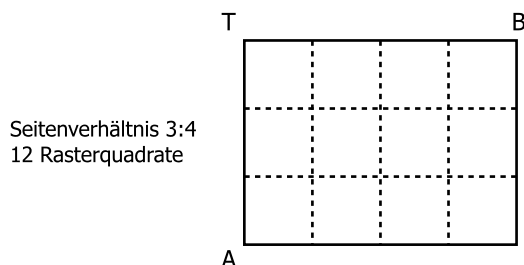
Die Grundaufgabe zur Herstellung einer Asymmetrie lautet „Teilung einer Strecke“. Wo der Teilungspunkt zu sitzen hat, um den Eindruck von Harmonie zu erwecken oder einen symbolträchtigen Bezug herzustellen, darüber gibt es Regeln, die bereits in den mittelalterlichen »Sieben Freien Künsten«¹ aufgehoben und weiterentwickelt worden sind.

Aus dem Ordnungssystem der Musiktheorie boten sich für die Architektur pythagoräische Tonintervalle an, wie 1:2, 2:3, 3:4, ... 9:8, ... 243:256 (Oktave, Quinte, Quarte, Ganzton, Halbton). Jedes dieser Paare natürlicher Zahlen beschreibt eine Variante geometrischer Teilung.

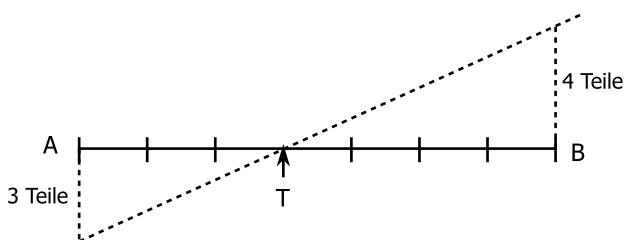
Zum Beispiel das Teilungsverhältnis 3:4
_auf der Strecke



_in der Fläche



_mit dem Strahlensatz



Die Parallelenabschnitte verhalten sich wie die Abschnitte TA und TB auf den Strahlen.

¹ Die Sieben Freien Künste bezeichnen seit der Antike Bildungszweige und sind in zwei Gruppen unterteilt: In das Trivium (Grammatik, Dialektik, Rhetorik) und in das Quadrivium (Arithmetik, Musik[theorie], Geometrie, Astronomie).



Der Goldene Schnitt gehört dem Ordnungssystem der Geometrie an. Dessen Teilungsverhältnis läßt sich mit einem Paar natürlicher Zahlen nicht mehr exakt ausdrücken. Beim Goldenen Schnitt ist der Teilungspunkt so zu setzen, daß die große Teilstrecke sich zur ganzen Strecke wie die kleine Teilstrecke zur großen Teilstrecke verhält, d. h.

$$AT : AB = TB : AT.$$

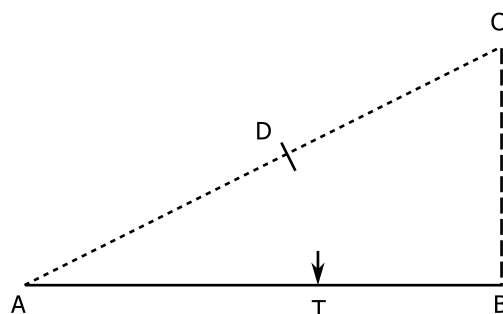
Mit Zirkel und Lineal gelingt diese Konstruktion unter den Voraussetzungen:

$$BC = \frac{1}{2} AB \text{ und Winkel } ABC = 90^\circ$$

mit den beiden Schritten (Zirkelbögen):

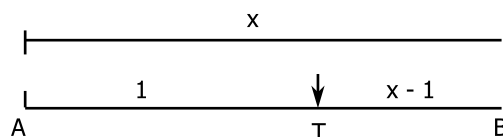
D mit $CD = BC$ um Punkt C abschlagen;

T mit $AT = AD$ um Punkt A abschlagen.



Die geometrische Konstruktion ist einfach aber undurchsichtig, denn es bleibt die Frage, weshalb diese Teilungsbedingung erfüllt. Um Zahlen zu finden, mit denen sich in diesem Falle das Teilungsverhältnis ausdrücken läßt, formulieren wir die Teilungsbedingung um:

Wir setzen $AT = 1$ (konstant) und fragen, wie lang die Strecke AB zu nehmen ist, damit die Teilungsbedingung erfüllt ist.



Die Teilungsbedingung bekommt in diesem Kontext die Form $1 : x = (x - 1) : 1$. (1)

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet $x = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1.618033988...$

Diese Dezimalzahl besitzt unendlich viele Stellen hinter dem Komma, und sie hat keine Periode. Wir nennen diese besondere Zahl Φ .

Aus Gleichung (1) folgt ferner

$$x - 1 = 1/x,$$

d. h.

die Maßzahl der Strecke TB ist $\Phi - 1$ und zugleich der Kehrwert von Φ .

Aus Gleichung (1) folgt aber auch

$$x = 1 + 1/x. \quad (2)$$

Diese Relation benutzen wir, um Zahlen zu generieren, mit denen wir uns Φ Schritt für Schritt nähern, bis der Unterschied zu Φ so klein geworden ist, daß er für die Baupraxis bedeutungslos wird. Auf diese Weise finden wir aus dem Umgang mit irrationalen Zahlen auf den Weg zur mittelalterlichen Arithmetik zurück.

Wir beginnen das Iterationsverfahren mit

$$x = 2 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 1/2 = 3/2 \quad (1. \text{ Schritt})$$

und setzen das Verfahren derart fort, daß das errechnete Ergebnis im folgenden Schritt als Eingabewert dient.

$$x = 3/2 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 2/3 = 5/3 \quad (2. \text{ Schritt})$$

$$x = 5/3 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 3/5 = 8/5 \quad (3. \text{ Schritt})$$

$$x = 8/5 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 5/8 = 13/8 \quad (4. \text{ Schritt})$$

$$x = 13/8 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 8/13 = 21/13 \quad (5. \text{ Schritt})$$

$$x = 21/13 \quad \text{in} \quad 1 + 1/x = 1 + 13/21 = 34/21 \quad (6. \text{ Schritt})$$

usw.

Zu unserer großen Überraschung erkennen wir in den Zählern und in den Nennern der iterierten Brüche die Glieder der Fibonacci-Zahlenfolge²:

... , 2, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Das rekursive Bildungsgesetz dieser Zahlenfolge lautet:

- Für die beiden ersten Zahlen werden die Werte Null und Eins vorgegeben.
- Jede weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Mit den Brüchen aus den Schritten 2 bis 6 und aus allen weiteren nähern wir uns Φ .

5/3	= 1.6666666...
8/5	= 1.6
13/8	= 1.625
21/13	= 1.6153846...
34/21	= 1.6190476...
	usw.
Φ	= 1.618033988...

Der Verfasser hat in Veröffentlichungen verschiedentlich auf den Zusammenhang zwischen Goldenem Schnitt und Fibonacci-Folge hingewiesen, stets mit Blickrichtung von der rekursiven Folge auf das Goldene Schnitt-Verhältnis, ohne den inneren Zusammenhang zwischen diesen darzulegen. In diesem Text nun wollte der Verfasser endlich einmal zeigen, daß sich die Zahlen der Fibonacci-Folge aus der Bedingung für den Goldenen Schnitt selbst herleiten lassen.

Hiermit sind wir aber immer noch nicht am eigentlichen Ziel angelangt. Zuletzt steht noch ein bei romanischen Saalkirchen und Basiliken zu beobachteter Sachverhalt aus, zu dessen Aufklärung alle bisherigen Überlegungen vorangestellt werden mußten.

Der fragliche Befund lautet:

Mehr als die Hälfte romanischer Saalkirchen der Altmark und zahlreiche romanische Basiliken stehen auf Grundrechtecken – hiermit ist das Rechteck gemeint, das den Kirchengrundriß umschließt – deren Seitenverhältnis Fibonacci-Quotienten zweiter Art (FQ2.A) sind.^{3,4} Das dazugehörige gemeinsame Maß ist ein ganzzahliges Vielfaches bekannter mittelalterlicher Längeneinheiten. FQ2.A sind

$$5:2, 8:3, 13:5, 21:8, \dots \quad (\text{FQ2.A}).$$

Wir vergleichen diese mit den Quotienten des Goldenen Schnitts

$$3:2, 5:3, 8:5, 13:8, 21:13, \dots \quad (\text{FQ1.A})$$

und erkennen, daß sich die Quotienten nur um 1 unterscheiden:

$$3/2 + 1 = 5/2, \quad 5/3 + 1 = 8/3, \quad 8/5 + 1 = 13/5$$

usw.

Schlußfolgerung:

Wenn die Folge der FQ1.A den Grenzwert Φ besitzt, so ergibt sich für die Folge der FQ2.A der Grenzwert $G = \Phi + 1$.

Diese Zahl G, die einer Klasse von mittelalterlichen Grundrißproportionen innewohnt, besitzt folgende schöne Eigenschaft:

$$G + 1/G = 3; \quad (3)$$

die Summe aus der Grundrißproportion und deren Kehrwert ergibt im Grenzfalle Drei.

Was die Idealform des Gotteshauses im Innersten zusammenhält, ist folglich die Drei, das Symbol der Trinität. Die Drei gibt den festen Rahmen vor, dem sich die Kirche beliebig nähern kann, ohne ihn aber jemals zu erreichen. Dies ist kein Mangel, sondern symbolischer Ausdruck des Strebens nach einem gottgefälligen Leben.

Der Vollständigkeit halber müssen wir noch eine Frage behandeln.

- Erfüllt G Gleichung (3)?

Aus

$$G = \Phi + 1 = (1 + \sqrt{5})/2 + 1 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.618033988\dots$$

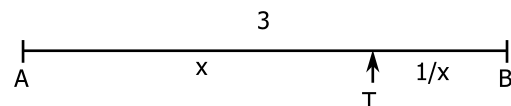
folgt

$$1/G = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.38196601\dots$$

und

$$G + 1/G = 3.$$

Hiermit ist auch die letzte Frage beantwortet.



² Leonardo von Pisa (1170-1240), genannt Fibonacci, der bereits als Kind von einem maurischen Rechenlehrer in der neuen indischen Zahlenschrift unterrichtet worden war, arbeitete zeitweilig am Hofe von Friedrich II. (1194-1250, 1220 Kaiser d. HHR) in Palermo. Im Jahre 1202 veröffentlichte Fibonacci das für die Verbreitung der arabischen Rechenverfahren mit Dezimalzahlen und der indischen Ziffern, einschließlich der Null, grundlegende Sammelwerk, den Liber Abaci.

³ Bodenstein, Hans-Peter (2011), Kirchen mit ausgestellttem Turm. Untersuchung der Grundrisse II, Seehausen (Altmark).

⁴ Bodenstein, Hans-Peter (2011), Über Kirchen des Typs CS[T] und CS, in: obiter dictum Nr. 13, Seehausen (Altmark).