Schnüre mit 13 oder 21 Knoten

od-Nr. 9 www.ndrom.de
obiter dictum 08/2010
Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Wir betrachten die mit einer Teilung versehene Meßschnur als technisches Hilfsmittel, das im mittelalterlichen Bauhandwerk zur Herstellung bestimmter Maßverhältnisse und Winkel Anwendung fand, um eine formgerechte und formschöne Baugestalt zu erreichen. Wie die Bauleute hierbei im einzelnen vorgegangen sein könnten, soll anhand einfacher mathematischer Überlegungen nachvollziehbar gemacht werden. Die Werkmeister besaßen hierüber bei der Arbeit gewonnene Erfahrungen, die sie in Form von Handlungsanweisungen, zumeist mündlich, weitergeben konnten.

Begriffsbestimmungen

Die Meßschnur ist eine Schnur bestimmter Länge, die auf eine Maßeinheit bezogen ist.

Die Knotenschnur ist eine Schnur, die durch Knoten markierte Unterteilungen aufweist.

Die 13-Knoten-Schnur besitzt 13 Knoten, deren Anordnung wie folgt geregelt ist.

- Der erste Knoten befindet sich im Abstand a vom Schnuranfang.
- Alle weiteren Knoten haben den Abstand a voneinander.
- Der 13te Knoten markiert das Schnurende.

Was den Knotenabstand a anbetrifft, so unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1: Die Knotenschnur ist Längenmeßgerät.
a stellt eine Maßeinheit oder ein Baumaß dar.
Fall 2: Die Knotenschnur ist Konstruktionshilfe.
a ist beliebig und zweckmäßig gewählt.

Anwendungen der 13-Knoten-Schnur

1. Darstellung des Goldenen Schnitts
Punkt T teilt die Strecke AB genau dann im Goldenen Schnitt, wenn sich das längere Teilstück (M = maior) zur ganzen Strecke wie das kürzere Teilstück (m = minor) zum längeren verhält (s. Figur 1).

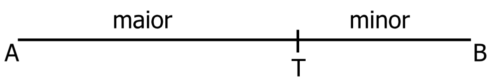


Fig. 1

$$M : AB = m : M \qquad (1)$$

Wie erfassen wir diesen geometrischen Sachverhalt mit einer Verhältniszahl? Um die zu deren Findung erforderliche Rechnung einfach zu gestalten, sei AB = 1. Hieraus wiederum folgt $m = 1 - M$. Mithin bekommt Gleichung (1) die Gestalt

$$M : 1 = (1 - M) : M \qquad (2)$$

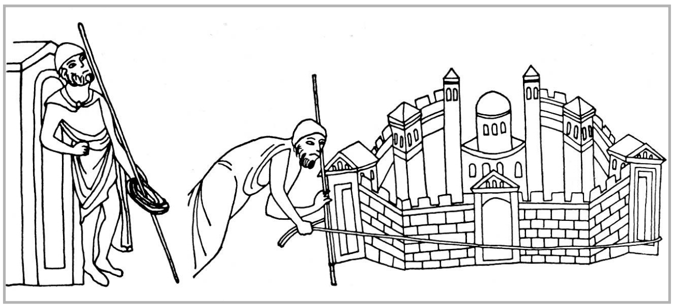
Die eine der beiden Lösungen der Gleichung (2) lautet

$$M = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

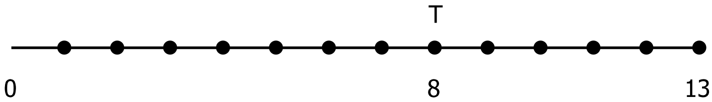
Nur diese ist für uns hier interessant. Mit dem Taschenrechner ergibt sich für maior die Näherung 0.6180339..., eine rationale Zahl mit unendlich vielen Ziffern hinter dem Komma. Minor ist die Ergänzung dieser Zahl zu 1.

$$M \approx 0.6180339...$$
$$m \approx 0.3819660...$$
$$M + m \approx 0.9999999...$$

Nun kommt die 13-Knoten-Schnur ins Spiel. Wir ziehen die Schnur straff und behaupten, daß der 8te Knoten die Schnur im Goldenen Schnitt teilt (s. Figur 2).



Bonn-Schwarzrheindorf, Pfarrkirche St. Klemens, Gewölbemalerei in der Unterkapelle, 1151/1156.

Fig. 2


$$M = 8, \quad m = 5, \quad M + m = 13$$

Zur Überprüfung ziehen wir Gleichung (1) heran.

$$8 : 13 \approx 5 : 8$$
$$0.615 \approx 0.625,$$

womit der theoretisch zu erwartende Wert 0.6180339... aus der Sicht des mittelalterlichen Werkmeisters nur unwesentlich verfehlt wird. Die relativen Fehler liegen unter 0.5% bzw. unter 1.2%.

Baumaße, die im Verhältnis 5:8 – oder besser noch im Verhältnis 8:13 – stehen, repräsentieren den Goldenen Schnitt in guter Näherung. Dieser tritt uns in der horizontalen Gliederung vertikaler Flächen ebenso entgegen wie in der Proportionierung von Grundrißflächen oder Bogenöffnungen.

2. Darstellung eines Winkels von 72°
Zur Darstellung eines 72°-Winkels dient ebenfalls die 13-Knoten-Schnur. Wir nehmen den Schnuranfang und den 13ten Knoten zusammen und ziehen die Schlaufe im 5ten und 8ten Knoten straff, wodurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, dessen Basiswinkel ≈72° betragen (s. Figur 3).

Wie oben bereits erwähnt worden ist, bilden Teilungen im Verhältnis 5:8 oder 8:13 den Goldenen Schnitt nur näherungsweise ab. Folglich stellt der Basiswinkel im Dreieck {0,13; 5; 8} mit seinen 72.54° nur eine Annäherung an 72° dar. Hingegen verfügt das {0,21; 8; 13}-Dreieck, das mit einer 21-Knoten-Schnur aufgezogen worden ist, über Baiswinkel von 71.79°.

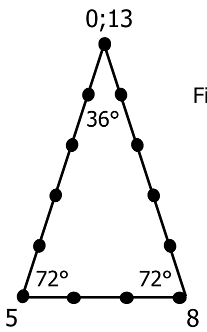


Fig. 3
Dreieck {0,13; 5; 8}

Fazit: Mit Knotenschnüren ist dem Goldenen Schnitt in der Praxis leider nicht exakt beizukommen. Der Teilungspunkt T liegt streng genommen zwischen zwei Knoten – nahe einem der beiden – und nicht auf einem Knoten.

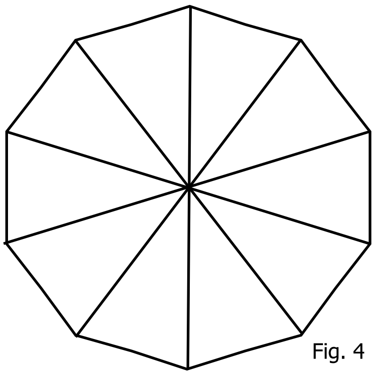


Fig. 4

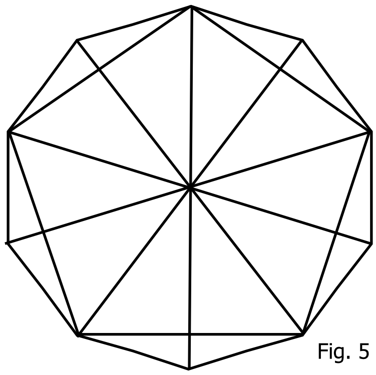


Fig. 5

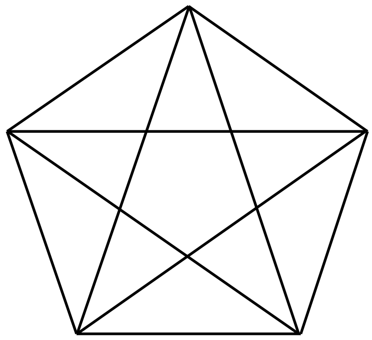


Fig. 6

3. Erzeugung eines Fünfecks

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, mißt der Winkel in der Dreiecksspitze 36° (Scheitelwinkel), was einem Zehntel des Vollwinkels entspricht. Folglich entsteht ein Zehneck, wenn zehn solcher Dreiecke, wie {0,13; 5; 8} oder {0,21; 8; 13}, mit ihren Spitzen in einem gemeinsamen Punkt derart aneinander gefügt werden, daß die Schenkel übereinander liegen (s. Figur 4). Um den Winkelfehler hierbei ausgleichen zu können, sollte der Aufbau des Zehnecks einmal im Uhrzeigersinn und hernach gegen den Uhrzeigersinn vorgenommen werden.

Wie aus dem Zehneck ein Fünfeck hervorgeht, veranschaulicht Figur 5. Über dessen fünf Seitenlinien erheben sich gleichschenklige Dreiecke, die im Zentrum der Figur 72°-Winkel (Scheitelwinkel 36° + 36°) aufweisen. Hieraus folgt für deren Winkel an der Dreiecksbasis, der Fünfeckseite, 54°.

54° + 54° + 72° = 180°

Die Liste der Merkmale des Fünfecks könnte folgendermaßen lauten (s. Figur 6):

• Die Diagonalen über derselben Fünfeckseite bilden mit dieser ein »Goldenes Dreieck«, d. h., die Basiswinkel betragen 72°.

• Das Verhältnis aus der Länge der Fünfeckseite und der Länge der Fünfeckdiagonalen ist das des Goldenen Schnitts.

• Jede Fünfeckdiagonale teilt zwei andere Fünfeckdiagonalen im Goldenen Schnitt.

• Die Schnittfigur der Diagonalen ist wieder ein Fünfeck.

Die hier genannten Teilungen und Winkel sind mathematisch exakt.

Aus diesen Merkmalen erschließt sich uns eine einfachere Knoten-Schnur-Konstruktion zur Darstellung des regelmäßigen Fünfecks. Wir benötigen für die Durchführung zwei 21-Knoten-Schnüre und fünf Helfer, die in der Umgebung der näher zu bestimmenden Punkte A, B, C, D und E Aufstellung nehmen, um zwei Dreiecke der Art {0,21; 8; 13} aufzuspannen (s. Figur 7). Dreieck BCE ist gegenüber Dreieck ABD im gemeinsamen Punkt B drehbar gehalten. Beide Dreiecke haben ihre Endposition erreicht, wenn bestimmte »goldene« Knoten auf den vier Dreiecksschenkeln in den Punkten T_1, T_2 und T_3 zur Deckung gebracht worden sind (s. Figur 8). Die Konstruktion, ausgeführt auf einer wohlgeebneten, horizontierten Freifläche, erfährt mit dem Einschlagen der Eckpflöcke ihren Abschluß.

Woher kommen die Zahlen 5, 8, 13, 21?

Es handelt sich um Zahlen aus dem Anfangsstück der Fibonacci-Folge. Diese hat unendlich viele Glieder und beginnt mit

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Jedes weitere Glied ergibt sich als Summe aus den beiden vorangehenden. Der Quotient aus zwei benachbarten Gliedern liegt in der Nähe von $(\sqrt{5} - 1)/2$. Je weiter rechts die Zahlen in der Folge stehen, um so weniger weicht der Quotient benachbarter Folgenglieder von der Zahl $(\sqrt{5} - 1)/2$ ab.

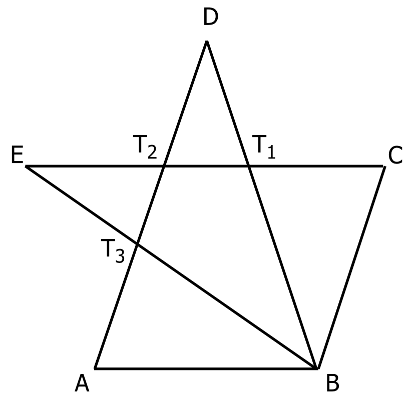


Fig. 7

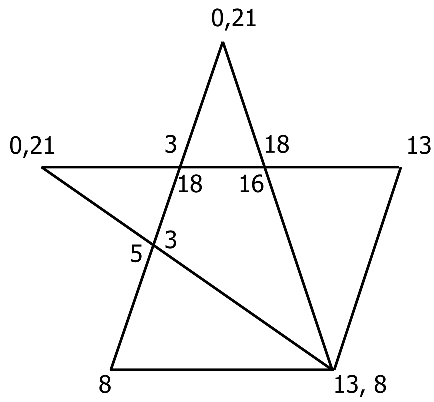


Fig. 8

In Fig. 8 sind die »goldenen« Knoten des Dreiecks ABD außerhalb des Dreiecks notiert, die des Dreiecks BCE im Dreieck. Die Numerierung der Knoten beginnt im Scheitelpunkt und verläuft entgegen dem Uhrzeigersinn.

Die Folge der Quotienten 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, ... konvergiert gegen $(\sqrt{5} - 1)/2$.

Leonardo Fibonacci hat 1202 mit dieser Folge das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieben. Aber bereits um 100 n. Chr. kannte Nikomachos von Gerasa diese Zahlenfolge. Im 18. Jh. erhielt der fragliche Grenzwert die Darstellung $(\sqrt{5} - 1)/2$. Diese Zahl ist mit den Möglichkeiten der vier Grundrechenarten nicht zu erfassen.

Die Geometrie hält sowohl für die Konstruktion eines Fünfecks als auch für die Teilung einer beliebigen Strecke nach dem Goldenen Schnitt Algorithmen bereit, die klassisch mit Lineal und Zirkel abzuarbeiten sind. Gelangen die Algorithmen in der Größenordnung von Bauwerksteilen zur Ausführung, so erscheint es ratsam, Lineal und Zirkel durch Knotenschnüre, Leinen und Pflöcke zu ersetzen. Hierbei repräsentiert die Knotenschnur selbst keinen geometrischen Sachverhalt, sie dient lediglich zu dessen Konstruktion.