Zahlen und Zahlenzusammenhänge

ndRom

od-Nr. 7 www.ndrom.de

obiter dictum 05/2009

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Vorbemerkung

Wir benutzen die natürlichen Zahlen und einfache zahlentheoretische Zusammenhänge, um Anordnungen von Raum- und Schmuckelementen im Kirchenbauwerk zu erfassen und zu beschreiben. Mit der Verwendung moderner Begriffe, Zeichen und Schreibweisen bedienen wir uns hierbei einer uns geläufigen Sprache, um arithmetische Inhalte zu transportieren, die den Gebildeten des Mittelalters durchaus geläufig waren.

Anhand der Zähl- und Anordnungsbefunde am Sanktuarium der Basilika in Krevese führen wir in elementare Sachverhalte dieser Art ein. Doch zuvor sei an grundlegende Begriffe erinnert.

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind 1, 2, 3, 4, 5, ...

Die drei Pünktchen bedeuten »und immer so weiter«.

Mit den in der Mengentheorie üblichen Symbolen können wir auch N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}, schreiben, wobei N für »Menge der natürlichen Zahlen« steht.

Mit natürlichen Zahlen lassen sich sowohl Objekt-Anzahlen erfassen, als auch deren Objekt-Plätze nummerieren. Hierfür bedarf es nicht notwendig der Null.

Gerade und ungerade Zahlen

Sind die natürlichen Zahlen in monoton wachsender Ordnung niedergeschrieben, so fällt als erstes der regelmäßige Wechsel von ungeraden und geraden Zahlen auf.

Die geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, weshalb sich diese mit dem Ausdruck

$$2 \cdot n \qquad \text{mit n aus N} \qquad (1)$$

darstellen lassen. Konkret:

$$2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 5,\ \ldots$$

Ungerade Zahlen hingegen hinterlassen bei der Division durch 2 den Rest 1. Folglich gilt für diese die Darstellung

$$2 \cdot n - 1 \qquad \text{mit n aus N.} \qquad (2)$$

Konkret: $2 \cdot 1 -1 =1,\ 2 \cdot 2 -1 =3,\ 2 \cdot 3 -1 =5,\ 2 \cdot 4 -1 =7, \ldots$

Zweierpotenzen

Die Potenzen der natürlichen Zahl 2 sind stets gerade:

$$2^1 =2,\ 2^2 =4,\ 2^3 =8,\ 2^4 =16,\ 2^5 =32, \ldots$$

Allgemein: 2^n mit n aus N. (3)

Vertauschen wir bei den Zweierpotenzen Basis und Hochzahl (Exponent), so ergeben sich die Quadratzahlen.

Quadratzahlen

$$1^2 =1,\ 2^2 =4,\ 3^2 =9,\ 4^2 =16,\ 5^2 =25,\ 6^2 =36, \ldots$$

Offensichtlich folgt auch hier der ungeraden Quadratzahl eine gerade und der geraden eine ungerade Quadratzahl.

Wir interessieren uns im folgenden nur für die ungeraden Quadratzahlen

$$(2n -1)^2 \quad \text{mit n aus N.} \qquad (4)$$

Konkret: $1^2 =1,\ 3^2 =9,\ 5^2 =25,\ 7^2 =49, \ldots$

Dreieckszahlen

Dreieckszahlen sind

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Die Bildungsvorschrift für diese Zahlen lautet:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \\ 15 &= 1+2+3+4+5 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Diese Anordnung der Zeichen verrät den begrifflichen Bezug zu »Dreieck«. Eine allgemeine Darstellung für Dreieckszahlen könnte

$$n \cdot (n+1) /2 \qquad \text{mit n aus N} \qquad (5)$$

lauten.

Konkret: $1 \cdot 2 /2 =1,\ 2 \cdot 3 /2 =3,\ 3 \cdot 4 /2 =6,\ 4 \cdot 5 /2 =10, \ldots$

Der große Zusammenhang

Dreieckszahlen und ungerade Quadratzahlen stehen in einem Zusammenhang, den eine Zweierpotenz vermittelt:

Nr. der Dreieckszahl		Nr. der ungeraden Quadratzahl	
1.	$1 \cdot 2^3 = 9 - 1$	2.	(6)
2.	$3 \cdot 2^3 = 25 - 1$	3.	
3.	$6 \cdot 2^3 = 49 - 1$	4.	
4.	$10 \cdot 2^3 = 81 - 1$	5.	
	...		

Wir verzichten hier auf eine verallgemeinerte Darstellung des Zusammenhangs. Die Beispiele sprechen für sich.

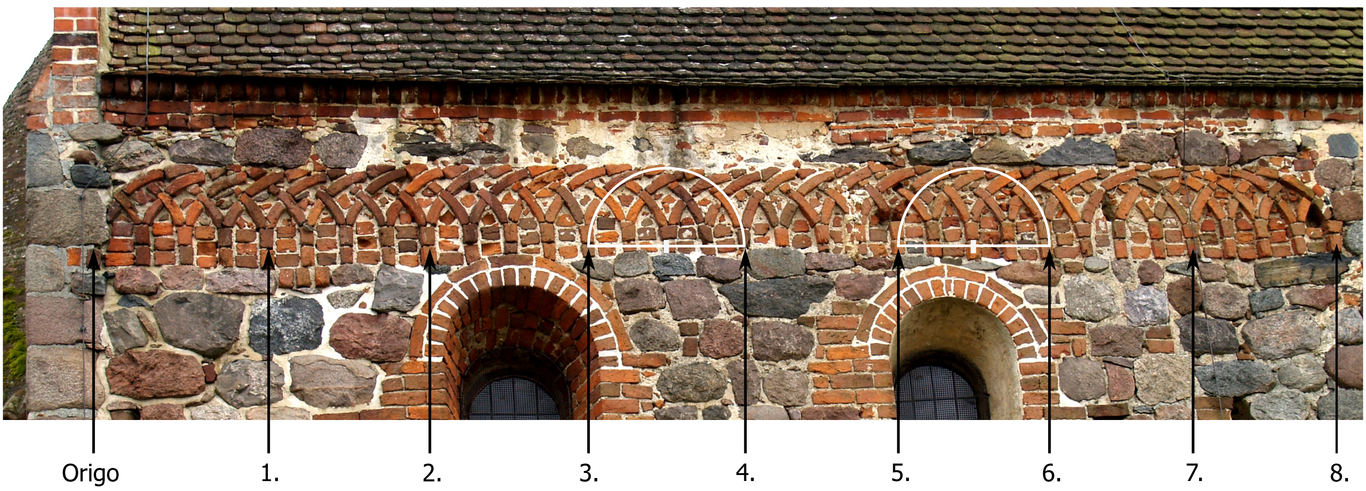

Abb. 1: Fries auf der Nordseite des Chores der Basilika zu Krevese. Die Pfeile am Bild verraten durch ihren regelmäßigen Abstand zueinnander etwas von der hohen Genauigkeit, mit der die Konsolen gesetzt worden sind. (Fotos: Verfasser)

Chorfries der Kreveser Basilika

„An der Benediktinerinnen-Klosterkirche in Krevese taucht ein Kreuzbogenfries an der Chornordseite [...] und ein Rundbogenfries an der Apsis [...] auf. Erstgenannter ist aus einer derart dichten Folge sich durchsteckender Bögen gebildet, daß diese unmotiviert im Scheitelbereich auslaufen, ohne eine homogene Struktur aufzubauen. Offenbar war man hier mit der Bildung eines regelmäßigen Kreuzbogenfrieses nicht vertraut. Am Rundbogenfries der Apsis wird der Halbkreis der Bögen nicht mittels gekrümmter Formsteine gebildet, sondern unmittelbar aus den Normalschichten herausgeschnitten."[1]

Der hier in Rede stehende Chorfries läßt aber wohl auch den entgegengesetzten Schluß zu. Wer eine so komplexe und dennoch wohlstrukturierte Überlagerung von Friesbögen in Backstein ausführen kann, der bringt auch einen klassischen Kreuzbogenfries zustande. Abbildung 1 stellt dar, wovon hier die Rede ist. Im Traufenbereich der südlichen Chorwand befindet sich kein Fries.

Wir folgen dem Schwung der einzelnen Bögen von links nach rechts, mit anderen Worden, von Ost nach West. Die im gleichen Sinn durchgezählten Marken – hier nummerierte Pfeile – sind so angebracht, daß sie gleichweite Intervalle bilden. Links von jeder Marke gehen im angrenzenden Intervall vier Bögen auf. Bei insgesamt acht Intervallen haben wir es folglich mit 32 Bögen zu tun. Wir können den Bogenzyklus gedanklich schließen, indem wir die im achten Intervall aufsteigenden Bögen sich im ersten Intervall vollenden lassen.

Abb. 2: Apsis der Kreveser Basilika.

Die einzelnen Bögen laufen in zwei hochkant gestellten Steinen aus. Diese bilden eine Frieskonsole. Jeder der einzelnen Bögen hat einen Radius, der zwei Konsolabständen entspricht. Der Bogenmittelpunkt liegt jeweils im unteren von beiden Konsolsteine.

Die Konstruktion des Traufenfrieses basiert offensichtlich auf Zweierpotenzen. Die Zahl der Intervalle beträgt $8 = 2^3$ und die Anzahl der Bögen $32 = 2^5$.

Die Länge des Frieses beträgt, gemessen von der Mittelachse der Origo-Konsole bis zur Mittelachse der 32ten Konsole, 8.58 m ±0.03 m. Im Rahmen der Meßgenauigkeit ergibt die Umrechnung in eine mittelalterliche Längeneinheit[2] hierfür gerade 320 uncia. Folglich sind die Konsolen im Abstand von 10 uncia positioniert.

Apsis der Kreveser Basilika

Diesem Zahl-Konzept folgt auch der Aufbau der Hauptapsis (Abbildung 2). Wir zählen im folgenden stets von unten nach oben ab. Über dem sorgfältig gearbeiteten Sockelprofil – es ist erst im Jahr 2004 wieder freigelegt worden – erheben sich $16 = 2^4$ Feldsteinschichten mit ausgeprägten Lagerfugen. Hierzu mußten die Feldsteine so ausgewählt werden, daß sie in jeder Schicht von der Größe her zueinander passen. Die 8te und die 16te Schicht treten mit auffallend größeren Findlingen hervor als die darüber oder darunter gelagerten.

Über dem Feldsteinmauerwerk bildet der Kranz aus Frieskonsolen eine eigene Schicht. Hierüber erheben sich noch einmal $32 = 2^5 = 2 \cdot 2^4$ Schichten Backsteinmauerwerk, das im unteren Teil zwischen den Apsisfenstern von Feldsteinen durchsetzt ist. Auch in den Laibungen dieser Fenster zählen wir $16 = 2^4$ Schichten.

Den Übergang vom Feldstein- zum Backsteinmauerwerk vermittelt ein Fries, der sich aus 25 Bögen zusammensetzt. Diese Zahl scheint hier aus dem Rahmen zu fallen. Sie tut es aber nicht. Wir erinnern uns an die Beziehung (6), in der die zweite Dreieckszahl, die dritte Zweierpotenz und die dritte ungerade Quadratzahl miteinander verknüpft sind:

$$3 \cdot 2^3 = 25 - 1 .$$

In dieser Weise repräsentiert der Apsisfries einen konzeptionellen Kerngedanken im Aufbau des Sanktuariums.

Im Apsisfries gibt es hierauf einen weiteren Hinweis. Im Kranz der Konsolen sind genau acht ($8=2^3$) von diesen Konsolen als Gesichter bzw. Masken ausgebildet. Selbst deren Anordnung folgt einem bestimmten Plan. Die Zählrichtung, die den folgenden Angaben zugrunde liegt, verläuft von Süd über Ost nach Nord. Zwei Masken fassen den sechsten Bogen ein. $6 = 3 \cdot 2$ ist eine vollkommene Zahl[3]. Hier bilden 2 und 3, nicht wie bisher eine Zweierpotenz, sondern ein Produkt aus zwei Faktoren. Die folgenden beiden Masken rahmen den 14ten Bogen ein. $14 = 7 \cdot 2$. Den 21ten Bogen markieren auf jeder Seite zwei Maskenkonsolen. $21 = 7 \cdot 3$. Sieben ist die heilige Zahl schlechthin und Drei symbolisiert die Trinität.

---

[1] Kaufmann, Damian (2009), Die romanischen Backsteindorfkirchen in der Altmark und im Jerichower Land Studien zur Kleinkirchenarchitektur an der Mittelelbe und im südlichen Ostseeraum, Kiel (Dissertation)

[2] Wir finden hier den Eltenfuß (1 pes.el = 0.323 m) angewendet. Im übrigen gilt die Teilung 12 uncia = 1 pes.

[3] Eine natürliche Zahl wird vollkommene Zahl (auch perfekte Zahl oder ideale Zahl) genannt, wenn sie die Summe ihrer positiven echten Teiler (d.h. aller Teiler außer sich selbst) ist.
Die echten Teiler von 6 sind 1, 2 und 3. Ihre Summe ist 1+2+3 = 6.
Für 28 sind die echten Teiler 1, 2, 4, 7 und 14, so daß 1+2+4+7+14 = 28 ist.

Analyse des Chorfrieses

Zwischen der nullten und der 32sten Konsole verlaufen acht halbkreisförmige Friesbögen, die sich die erste, vierte, achte, … , 24ste, 28ste Konsole teilen (s. Abb. 1). Diese Konsolen nennen wir, einschließlich der nullten und der letzten, der 32sten, Hauptkonsolen. Die acht Friesbögen über den Hauptkonsolen, welche 40 uncia.el voneinander entfernt angeordnet sind, verkörpern acht Halbkreise, aus denen wir uns 4 Vollkreise zusammengesetzt denken. Damit ist die erste Zahl zur Berechnung der Kreiszahl Pi ≡ π abgebildet, der Exponent 4.

Zwischen zwei benachbarten Hauptkonsolen stehen 3 Konsolen, die den Durchmesser der Hauptkreise in 4 gleiche Teile zerlegen. Auf diese Weise ergibt sich der Divisor zu 3 und der Dividend zu 4. Mit diesen drei Zahlen hält der Term

(Dividend geteilt durch Divisor) hoch Exponent

für Pi

$$(4:3)^4 = 3.160494 \approx \pi$$

bereit.

Die Zahlen, die hier in die Rechnung eingehen, sind Anzahlen und als solche christliche Symbolzahlen für die Trinität (Drei) und das irdische Reich (Vier).

Da sich von jeder Konsole ein Friesbogen in westllicher Richtung erhebt und vier Konsolen weiter westlich wieder aufsetzt, ergibt sich ein Bogenfries von »gedrängter« Struktur, die einzigartig ist. Den Kreuzbogenfries in dieser Weise geometrisch zu erweitern, um den arithmetischen Wesenszug des Kreises auszudrücken, dürfte ebenso einmalig sein.

Die äquivalente Umformung des Terms

$$(4:3)^4 = (2^2:3)^4 = 2^8:3^4 = 256:81 \approx \pi$$

führt zum Verständnis des darüber hinaus bestehenden musiktheoretischen Zusammenhangs, der da lautet:

Ein Drittel der Kreiszahl entspricht dem Schwingungsverhältnis des Halbtonintervalls.

$$1/3\ \pi \approx 1/3\ (256:81) = 256/243$$

Oder in Umkehrung des Sachverhaltes:

Drei Halbtöne führen auf die Kreiszahl.

Nun kommt es bei romanischen Kirchen durchaus vor, daß der Werkmeister dem Chorinnenraume das Seitenverhältnis 256:243 zugedacht hat. In dem Falle sprechen wir von einem Halbton-Chor. Und ein solcher verbirgt sich in Krevese hinter der Chorwand mit dem merkwürdigen Kreuzbogenfries. Was der Werkmeister mit einer derartigen Chorgestalt beabsichtigte, liegt nunmehr auf der Hand. Es ging ihm um eine Architekturfassung der Gedankenkette

„Heiligtum – Halbton – Kreis – Himmel – Ewigkeit".

Ohne Zahl führt kein Weg vom Glauben zu harmonischer, symbolträchtiger Kirchenarchitektur.

Hier tritt eine ganzheitliche Denkweise zutage, die sich die zukünftigen Werkmeister an den Kloster- und Domschulen im Studium des Quadriviums (Musik, Arithmetik, Geometrie, Astronomie) aneigneten.

Bereits im 17. Jh. v. Chr. dachten ägyptische Gelehrte die Kreiszahl als Quadrat des Quotienten 16/9, woraus nicht zuletzt die Verehrung der Zahlen Zwei und Drei spricht.

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{und} \quad 9 = 3 \cdot 3$$

Auch Pythagoras (570-510 v. Chr.) und seine Anhänger waren die vorgetragenen Zahlenzusammenhänge mit deren musiktheoretischen und geometrischen Aspekten geläufig, was übrigens ebenso für Boethius (um 480 - um 546) zutrifft.

Fazit

Beim Chor der Kreveser Basilika beruht die eigenwillige Ausprägung der Raumgestalt und des Kreuzbogenfrieses auf zahlentheoretischen Überlegungen, welche der Werkmeister zur Darstellung der Verbindung von Himmel und Erde einsetzte.