Maßverhältnisse – Grundlagen

ndRom

od-Nr. 3 www.ndrom.de

obiter dictum 01/2009

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Eine immer wiederkehrende Aufgabe besteht darin, nach dem Zahlenverhältnis zu suchen, in dem zwei Meßwerte zueinander stehen. Derartige Meßwerte treten uns als Grundseiten eines Kirchenraums, als Scheitelhöhe und lichte Weite eines Bogens oder als Kantenlängen eines Backsteins entgegen.

Wie können wir Maßverhältnisse bestimmen?

Um die Lösungsschritte zu verstehen, beschreiten wir zunächst den entgegengesetzten Weg. Wir geben ein Maßverhältnis vor und berechnen hierzu zwei Längenangaben, die in diesem Verhältnis stehen.

Vorgabe 1: Die beiden fraglichen Längenangaben mögen das Maßverhältnis 9:4 haben.
Vorgabe 2: Ein gemeinsamer Faktor der Längenangaben sei 3.23 m.

Wir berechnen mit den beiden Vorgaben die Produkte u und v, wobei die Wahl dieser Bezeichner ohne Belang ist.

Rechnung: $u = 3.23\ \text{m} \cdot 9 = 29.07\ \text{m}$
$v = 3.23\ \text{m} \cdot 4 = 12.92\ \text{m}$

Wir haben auf diese Weise zwei Längenangaben gewonnen, die bezüglich des gemeinsamen Maßes 3.23 m im Maßverhältnis 9:4 stehen. In diesem Sinne sind u- und v-Wert kommensurabel bezüglich 3.23 m.

Wir gehen nun zu einer allgemeineren Darstellung über. Maßverhältnisse bezeichnen wir mit i:j und gemeinsame Maße mit g, woraus für u und v die Darstellungen

$$u = g \cdot i \quad \text{und} \quad v = g \cdot j$$

folgen.

29.07 m und 12.92 m sind »glatte« Ergebnisse. In der Praxis hingegen haben wir es mit Meßwerten zu tun, die mit Fehlern, die nicht zuletzt bei der Verwirklichung des Entwurfs gemacht wurden, behaftet sind. Wir tragen diesem Umstand Rechnung, indem wir willkürlich gewählte »Abweichungen« einrechnen:

$$M_1 = u - 0.45\ \text{m} \quad \text{und} \quad M_2 = v + 0.35\ \text{m}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die Ausgangsdaten

$$M_1 = (29.07 - 0.45)\ \text{m} = 28.62\ \text{m}$$
$$M_2 = (12.92 + 0.35)\ \text{m} = 13.27\ \text{m},$$

die nunmehr zwei Meßwerte repräsentieren mögen.

Wir kehren zur Eingangsfrage zurück: In welchem Verhältnis stehen die beiden Meßwerte M_1 und M_2? Grob geschätzt, in der Nähe von 2:1.

Bevor wir rechnen, legen wir fest, an welchen Verhältnissen wir interessiert sind. Nach Lage der Dinge – wir erkunden romanische Kirchen aus dem 12. und 13. Jh. – sollen es hier mindestens die folgenden teilerfremden Zahlenverhältnisse sein.

2:1
3:1, 3:2
4:1, ~~4:2~~, 4:3
5:1, 5:2, 5:3, 5:4
6:1, ~~6:2~~, ~~6:3~~, ~~6:4~~, 6:5
7:1, 7:2, 7:3, 7:4, 7:5, 7:6
8:1, ~~8:2~~, 8:3, ~~8:4~~, 8:5, ~~8:6~~, 8:7
9:1, 9:2, ~~9:3~~, 9:4, 9:5, ~~9:6~~, 9:7, 9:8
. . .
21:1, 21:2, ~~21:3~~, 21:4, 21:5, ~~21:6~~, ~~21:7~~, 21:8, ...

Konsonante Ton-Intervalle und der Goldene Schnitt sind hierin enthalten.

Wir probieren alle naheliegenden Zahlenverhältnisse mit den beiden Maßzahlen $\{M_1\} = 28.62$ und $\{M_2\} = 13.27$ durch. Bei i:j = 9:4 sollten wir dann fündig werden. $\{M_1\}$ steht für Maßzahl des Meßwertes M_1.

Jedes Zahlenpaar (i ; j) ist zur Berechnung von g_1 und g_2 genau einmal heranzuziehen:

$$M_1 / i = g_1 \quad \text{und} \quad M_2 / j = g_2.$$

Das Zeichen / steht für den Bruchstrich und verlangt eine Division.

Dasjenige Zahlenpaar (i ; j), bei dem sich g_1 und g_2 am wenigsten unterscheiden, stellt die Lösung dar, die für uns genau dann akzeptabel ist, wenn der relative Fehler, den die Differenz zwischen g_1 und g_2 hervorruft, unterhalb der Bau- und Meßfehler liegt.

Die beschriebene Rechenarbeit – systematisches Probieren und Bewerten – wird dem Computer übertragen. Das erforderliche Programm hierfür hat der Verfasser geschrieben und steht der Öffentlichkeit auf dessen Internetseite www.ndrom.de noch nicht zur Verfügung.

Geben wir die beiden Maßzahlen 28.62 und 13.27 in das Programm ein, und wählen wir die Toleranz 0.05, so erhalten wir das Ergebnis

$$i : j = 13:6 \quad \text{bezüglich} \quad g = 2.21\ \text{m}$$

Dieses bedeutet:
Das gemeinsame Maß von 28.62 m und 13.72 m ist in guter Näherung 2.21 m, bezogen auf das Verhältnis 13:6.
Probe:

$$2.21 \cdot 13 = 28.73 \approx 28.62 = \{M_1\}$$

und

$$2.21 \cdot \ 6 = 13.26 \approx 13.27 = \{M_2\}$$

Bezogen auf die Eingangswerte 28.62 m und 13.27 m liegen die Abweichungen dieser beiden von den entsprechenden Produkten 2.21 m·13 und 2.21 m·6 unter 1%.
Beweis:

$$(|28.73 - 28.62| \cdot 100)/28.62 = 0.38\%$$
$$(|13.26 - 13.27| \cdot 100)/13.27 = 0.08\%$$

Ergebnis: Für M_1 und M_2 gilt mit hinreichender Genauigkeit
$i : j = 13:6$ bezüglich $g = 2.21$ m.
Der relative Fehler dieser Darstellung ist kleiner als 0.4%.

Wo ist 9:4 geblieben? Es liegt nahe bei 13:6, denn

$$13:6 \approx 9:4, \quad \text{weil} \quad 13 \cdot 4 \approx 6 \cdot 9.$$

Die Aufdeckung von Maßverhältnissen und deren Interpretation erfolgt in der Regel in vier Schritten.

1. Zuerst nehmen wir die erforderlichen Messungen am Kirchenbauwerk vor.
2. Die gewonnenen Meßergebnisse werden auf Kommensurabilität hin untersucht.
3. Mittels Grundmaß g und Grundverhältnis i : j werden im Architekturkonzept Zusammenhänge aufgedeckt, die auf den Entwurf des Werkmeisters zurückgehen.
4. Gemeinsame Maße und insbesondere Grundmaße werden mit mittelalterlichen Längeneinheiten verglichen und gegebenenfalls in solche umgerechnet.

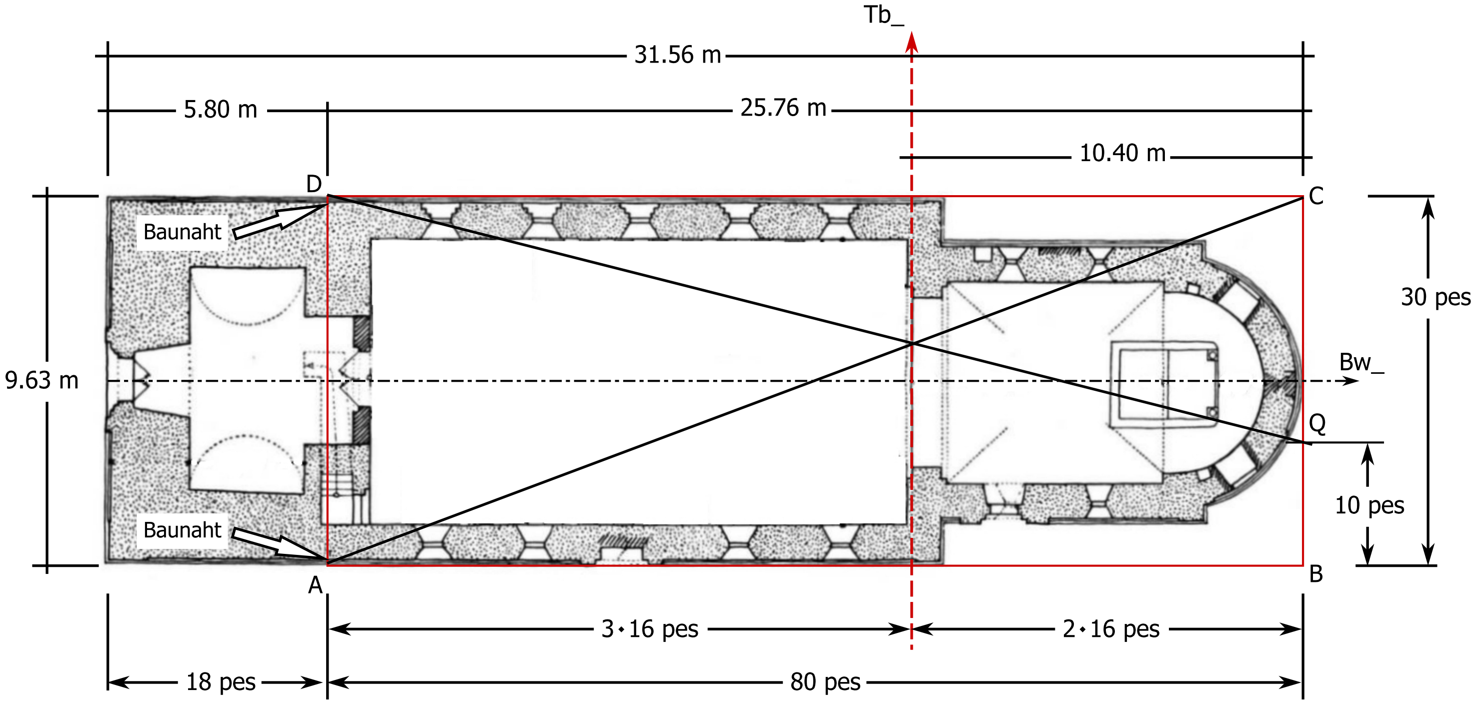

Abb. 1: Grundriß der Backstein-Saalkirche (1219d) in Giesenslage, im Nordosten der Altmark im Urstromtal der Elbe gelegen. Der verwendete Fuß ist der Elten-Fuß pes.el = 0.323 m. Die Strahlensatzfigur ACQD veranschaulicht, wie die innere Teilung auf dem (roten) Grundrechteck ABCD gedacht ist.
Bw_ ... Bauwerksachse; Tb_ ... Triumphbogenachse, die auf der Grenze von Sanktuarium (Chor mit Apsis), rechts von Tb_ , und Saal, links von Tb_ , liegt.

Analyse 1

Verhältnis der Außenmaße der romanischen Kirche in Giesenslage, bestehens aus Apsis, Chor, Saal und Turm (s. Abb. 1, 2).
Das Rechenergebnis lautet:

$$31.56 : 9.63 \approx 13{:}4 = i : j$$

bezüglich

$$g = 2.42 \text{ m}.$$

Die Darstellungen

$$13 \cdot 2.42 = 31.46 \quad \text{und} \quad 4 \cdot 2.42 = 9.68$$

weichen weniger als 0.6% von den Meßwerten ab und dürfen deshalb dem mittelalterlichen Entwurf zugedacht werden, sofern eine plausible Umrechnung des Grundmaßes in ein Fußmaß gelingt.

Anmerkung
Da 3 < 13:4 < 4, weil 13:4 = 3.25, stellt das Maßverhältnis 13:4 einen Verstoß gegen die Vorschrift

$$2 < i : j < 3,$$

dar, die romanische Kirchenentwürfe zwingend zu erfüllen hatten. Praktisch bedeutet dieses, daß die Kirchenlänge vom Werkmeister stets zwischen der doppelten und der dreifachen Breite der Kirche angelegt wurde.
Wie es zu diesem Regelverstoß gegommen ist, klären wir nach

Analyse 2.

Verhältnis der Außenmaße der Giesenslager Kirche ohne Westturm.
Die Grenze zwischen Westturm und Saal markieren Baunähte in den Außenwänden (s. Abb. 1). Diese Baunähte verlaufen 5.80 m von den Westkanten des Turms entfernt etwa parallel zu diesen. Der hier ins Auge gefaßte reduzierte Baukörper steht auf dem Grundrechteck ABCD und entspricht dem Erstentwurf der Saalkirche.

Das Rechenergebnis lautet:

$$25.76 : 9.63 \approx 8{:}3 = i : j$$

bezüglich

$$g = 3.22 \text{ m}.$$

Die Darstellungen

$$8 \cdot 3.22 = 25.76 \quad \text{und} \quad 3 \cdot 3.22 = 9.66$$

weichen weniger als 0.4% von den Meßwerten ab.

Anmerkung
Das Grundverhältnis 8:3 erfüllt die Bedingung 2 < 8:3 < 3 und ist deshalb regelkonform. Das zugehörige Grundmaß kann in den Elten-Fuß, der 0.323 m lang ist, umgerechnet werden.

$$g = 3.22 \text{ m} \approx 10 \text{ pes.el}$$

Diese Umrechnung von Meter in Fuß verursacht einen relativen Fehler, der kleiner als 0.4% ist.
Deshalb ist davon auszugehen, daß der ursprüngliche Kirchenentwurf den Grundwert g = 10 pes.el vorsah. Folglich sah dieser Entwurf die Kirchenlänge

$$AB = i \cdot g = 8 \cdot 10 \text{ pes.el} = 80 \text{ pes.el}$$

und die Kirchenbreite

$$BC = j \cdot g = 3 \cdot 10 \text{ pes.el} = 30 \text{ pes.el}$$

vor.

Analyse 3

Welche Überlegungen zur Dimensienierung des nachträglich angefügten Turms führten, wird schlagartig klar, wenn wir den Zusammenhang

$$5.80 \text{ m} \approx 18 \text{ pes.el}, \quad \Delta<0.3\%$$

zur Kenntnis genommen haben.

Die Grundrißabbildung ist entnommen:
Haetge, Ernst (1938), Kunstdenkmale der Provinz Sachsen. Der Kreis Osterburg, Burg b. M., S. 112.

Abb. 2: Südostansicht der Saalkirche in Giesenslage. (Foto: Verfasser)

Das Turm-Grundrechteck ist 18 pes.el lang und 30 pes.el breit, was zu dem Maßverhältnis

30 pes.el : 18 pes.el = 5:3

führt, das dem Goldenen Schnitt entspricht. Deshalb ist das Turm-Grundrechteck ein Goldenes Rechteck.

Anmerkung
Der Regelverstoß 13:4 kommt durch die Verlängerung des Grundrechtecks ABCD um das Goldene Rechteck, auf dem der Turm steht, zustande. Dieser ästhetische Kunstgriff mochte das schlechte Gewissen, das der Regelverstoß verursachte, beschwichtigen oder zumindest einen Fluch abwenden.

Analyse 4

Wie verteilen sich Sanktuarium (Chor mit Apsis) und Saal auf dem Grundrechteck ABCD?
Welcher Teil der Gesamtlänge 80 pes.el ist jedem Raumbereich zugestanden?

Entscheidend ist die Lage der Triumphbogenachse Tb_. Diese trennt im Gotteshaus das Sanktuarium, östlich von Tb_ gelegen, vom Saalbereich, westlich von Tb_ gelegen. In Giesenslage teilt Tb_ die Bauwerkslänge 80 pes.el im Verhältnis 2:3.
Da 2+3 = 5, entfallen auf das Sanktuarium zwei Fünftel der Gesamtlänge und auf den Saal drei Fünftel der Gesamtlänge (s. Abb. 1).

2/5 · 80 pes.el = 2·16 pes.el = 32 pes.el
3/5 · 80 pes.el = 3·16 pes.el = 48 pes.el

Anmerkung

Die Analysen verdeutlichen, wie zweckmäßig es ist, den Übergang von der Längeneinheit Meter zur Längeneinheit Fuß zu vollziehen. Mit diesem Schritt treten wir in die Gedankenwelt des Werkmeisters ein, der den Kirchenentwurf erdacht hat.
Nicht zur Sprache gekommen sind
_das System der zur Verfügung stehenden Fußmaße,
_die Fibonacci-Folge und deren Eigenschaften sowie
_die Zahlensymbolik, welche die Analyse aufgedeckt hat.

Diese Ausführungen über Maßverhältnisse betreffen einen wesentlichen Teil der »mathematischen Architekturanalyse« (mAa), die der Verfsasser für seine Untersuchungen romanischer Kirchenarchitektur entwickelt hat.

Folgende Abhandlungen im Format »obiter dictum« vermitteln weitere Grundlagen:

Mittelalterliche Längeneinheiten / od-Nr. 5
Befunde für die Verwendung eines bestimmten Fußmaßes und seiner Teile an romanischen Dorfkirchen in der Altmark und im Elbe-Havel-Winkel.

Zahlen und Zahlenzusammenhänge / od-Nr. 7
Anhand der Zähl- und Anordnungsbefunde am Sanktuarium der Basilika in Krevese führen wir in elementare Sachverhalte dieser Art ein. In dem Zusammenhang werden mathematische Grundaussagen wiederholt.

Schnüre mit 13 oder 21 Knoten / od-Nr. 9
Praktische Geometrie zum Goldenen Schnitt.

Teilung einer Strecke mit der Schnur / od-Nr. 11
Dreiteilung und deren Verallgemeinerung zu noch höheren Teilungen.

Harmonische Asymmetrie / od-Nr. 26
Was die Idealform der romanischen Dorfkirche im Innersten zusammenhält.

Visualisierung einer Annäherung / od-Nr. 30
Reziproke Fibonacci-Quotienten 2ter Art im Grundrecheck – Symbolträger der Trinität.

VORMETRISCHE LÄNGENEINHEITEN / od-Nr. 50
Fuß- und Baumaße aufdecken. – Wie und weshalb?

SPITZBOGEN-ANALYSE / od-Nr. 66
Herleitung einer Radiusformel zur Auswertung von Meßwerten.

FUßRELATIONEN / od-Nr. 67
Ergenisse und Sichtweisen der praktischen und theoretischen Bauforschung.

MUSIKTHEORIE IN DEN SIEBEN FREIEN KÜNSTEN / od-Nr. 75
Grundwissen. Kontinuität dessen Vermittlung von der Antike bis ins Mittelalter.

ZAHL – GLAUBE – ARCHITEKTUR / od-Nr. 81
Übersichtliche Einführung anhand weniger Beispiele aus der romanischen Kirchenbaukunst.

MITTELALTERLICHE INTELLEKTUELLE / od-Nr. 84
Leonardo von Pisa, Gerbert von Aurillac und die artes liberales als Zahlenfundus für romanische Architekturentwürfe.

EIN SEHR GROßER FUß / od-Nr. 88
Eigenständiger Fuß (0.45 m) oder Modul? Einordnung in die ma. Einheiten-Systematik.

NATURTONREIHE UND TETRAKTYS / od-Nr. 89
Schwingungsverhältnisse der Tonintervalle und deren Zusammenhänge.

WERKMEISTER – KIRCHENBAUMEISTER / od-Nr. 90
Zahl – Glaube – Architektur. Die Rolle der Zahl im 'romanischen' Kirchenentwurf.

MATHEMATISCHE ARCHITEKTURANALYSE / od-Nr. 91
Anliegen, Methode, Struktogramm.

VERKNÜPFTE ARCHITEKTURMERKMALE / od-Nr. 103
Brandenburger Dom, Fibonacci-Quotienten verbinden Gestalt und Symbolik von Grundrechteck und Mensa.

ZWEI GRUNDREGELN, ROMANISCHE GOTTESHÄUSER ZU ENTWERFEN / od-Nr. 110
Vom Entwerfen romanischer Gotteshäuser mit Fibonacci-Quotienten oder Elementar-Quotienten vom 10. bis 13. Jahrhundert.