Teilung einer Strecke mit der Schnur

od-Nr. 11 www.ndrom.de
obiter dictum 09/2010

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Beim Ausschnüren eines Kirchengrundrisses standen Werkmeister und Architekt wohl auch vor der Aufgabe, eine Strecke zu halbieren, zu dritteln oder zu fünfteln. Ausgerüstet mit Pflöcken zum Markieren der konstruierten Punkte und mit einer Schnur, die länger als die zu teilende Strecke ist, lies sich diese Aufgabe leicht lösen.

Halbierung einer Strecke

Gegeben sei die zu halbierende Strecke AB. Wir verbinden die Schnurenden mit den Streckenenden und ziehen die Schnur, in der Mitte gehalten, straff. Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck (s. Fig. 1). Punkt M_1 wird markiert.

Um die gedankliche Übertragung des Sachverhalts von der Raute auf das Rechteck zu erleichtern, ist die Bezeichnung der Punkte in Figur 6 so wie in Figur 4 gewählt worden. D_1 drittelt hier die Diagonale AB, und D drittelt die lange Rechteckseite.

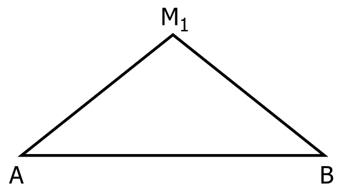


Fig. 1

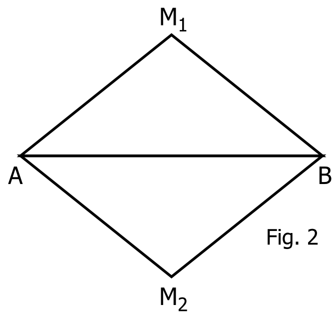


Fig. 2

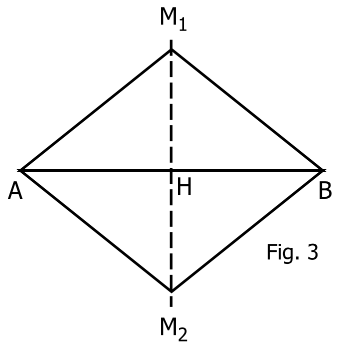


Fig. 3

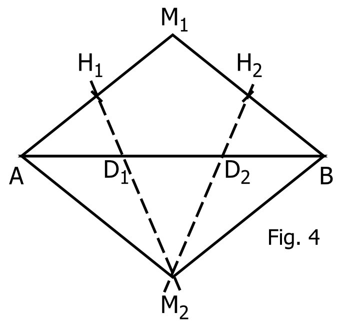


Fig. 4

Wir wiederholen die Prozedur auf der gegenüberliegenden Seite von AB. Auf diese Weise entsteht mit Punkt M_2 eine Raute (s. Fig. 2). Nunmehr wird die Schnur durch M_1 und M_2 gespannt und die Strecke AB im Punkt H halbiert (s. Fig. 3). Es ist eine mathematische Gegebenheit, daß sich die Diagonalen einer Raute, hier AB und M_1M_2, halbieren.

Drittelung einer Strecke

Die Drittelung einer Strecke baut auf Figur 2 auf. Hierin sind die Rautenseiten M_1A und M_1B in der beschriebenen Weise zu halbieren. An den Stellen, wo das durch die neuen Halbierungspunkte H_1 bzw. H_2 und M_2 gespannte Seil die Strecke AB berührt, befinden sich die Drittelungspunkte D_1 und D_2 (s. Fig. 4).

Eine notwendige Voraussetzung für dieses Teilungsverfahren ist, daß die gegenüberliegenden Seiten der Figur parallel verlaufen. Diese Bedingung erfüllt u. a. das Rechteck.

Quelle aus dem Mittelalter

Seit der Antike sind neben diesem verschiedene andere Streckenteilungsverfahren bekannt.[1] Dennoch erhebt sich die Frage, ob es direkte Hinweise darauf gibt, wie man im 12./13. Jh. über das Teilungsproblem (nach)gedacht hat. Europäische Quellen aus dieser Zeit sind hierzu, wie man weiß, rar. Aufschlußreich ist eine Darstellung, die sich im Skizzenbuch des Villard de Honnecourt befindet. Diese ist hier unter der Bezeichnung Fig. 5 wiedergegeben.[2] Villard de Honnecourt (auch Wilars dehonecort oder Vilars dehoncort) war ein Baumeister aus Honnecourt-sur-Escaut in der Picardie, dessen Wirken in der Zeit um 1230-1235 nachweisbar ist. Sein Skizzenbuch wird als eine der wichtigsten Quellenschriften des Mittelalters zum Thema Architektur und Bauwesen angesehen.

Das 33-seitige Buch besteht aus einer Sammlung von Zeichnungen und Skizzen, die Bauten, Bautechniken, Figuren, Tiere, Bauwerkzeuge und Gestaltungsprinzipien darstellen. Ergänzt wird das Werk durch einige Erfindungen wie z. B. ein Perpetuum Mobile.

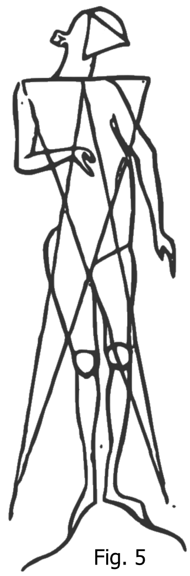


Fig. 5

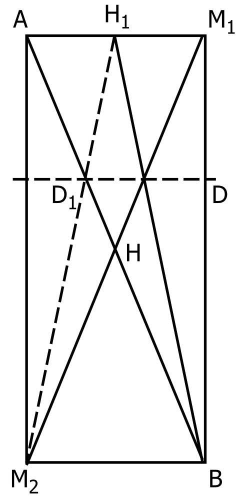


Fig. 6

In der sich hier nun anschließenden Fortsetzung der Teilung – auf ein Drittel der Rechtecklänge folgt ein Viertel, ein Fünftel, ein Sechstel usw. – wiederholen sich die Konstruktionsschritte, wobei der folgende Schritt auf den vorhergegangenen »aufsetzt«. Die Beschreibung des Verfahrens ist so abgefaßt, daß ihr die mathematische Begründung für das jeweilige Teilungsergebnis entnommen werden kann.

[1] Schmidt, Fritz (1988), Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und im Mittelalter, Stuttgart.
[2] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Villard_de_Honnecourt_Silhouettes.png (11.09.2010)

Fortgesetzte Teilung

Voraussetzung 1

ABCD ist ein Rechteck.
AD = a und AB = b

Voraussetzung 2

Punkt F halbiert die Strecke AB.
Punkt E halbiert die Strecke CD.

Voraussetzung 3

Punkt F ist Quellpunkt der Strahlen s_n, wobei n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Voraussetzung 4

s_0 verläuft durch E.

Aus den Voraussetzungen folgt

Punkt G halbiert BD und FE, d.h.
G teilt BD und FE im Verhältnis 1:1.

Abschließend ziehen wir den gestrichelten Pfeil durch G und markieren auf der Seite BC den Halbierungspunkt C_2.

Schritt 1

Wir zeichnen s_1 durch C_1 und erzeugen H.
H sei Zentrum einer Strahlensatzfigur mit den Strahlenabschnitten

HF und HG sowie HB und HC_1,

nebst den zugehörigen Parallelenabschnitten

FG und BC_1.

Hieraus folgt für die Parallelenabschnitte

FG : BC_1 = a/2 : a = 1:2.

Ebenso (Strahlensatz!) verhalten sich die Strahlenabschnitte. Abschließend ziehen wir den gestrichelten Pfeil durch H und markieren auf BC den Drittelungspunkt C_3.

Schritt 2

Wir zeichnen s_2 durch C_2 und erzeugen I.
I sei Zentrum einer Strahlensatzfigur mit den Strahlenabschnitten

IF und IG sowie IB und IC_2,

nebst den zugehörigen Parallelenabschnitten

FG und BC_2.

Hieraus folgt für die Parallelenabschnitte

FG : BC_2 = a/2 : a/2= 2:2.

Ebenso (Strahlensatz!) verhalten sich die Strahlenabschnitte. Abschließend ziehen wir den gestrichelten Pfeil durch I und markieren auf BC den Viertelungspunkt C_4.

Die noch folgenden Schritte verlaufen analog. Sie können anhand von Figur 7 durchgegangen werden, wozu die tabellarische Übersicht Orientierungshilfen bereithält.

Drehen wir in Figur 7 den gestrichelten Maßpfeil im jeweilig zugeordneten Ähnlichkeitszentrum G, H, I, J, K, L, ... um 90°, so erhalten wir auf der Seite AB eine entsprechende Teilungsskale.

Am Ende stellt sich nun heraus, daß die Bewerkstelligung der Konstruktion des Halbrechtecks AFED gar nicht bedurft hätte. Man decke die rechte Hälfte der Figur 7 nur einmal ab.

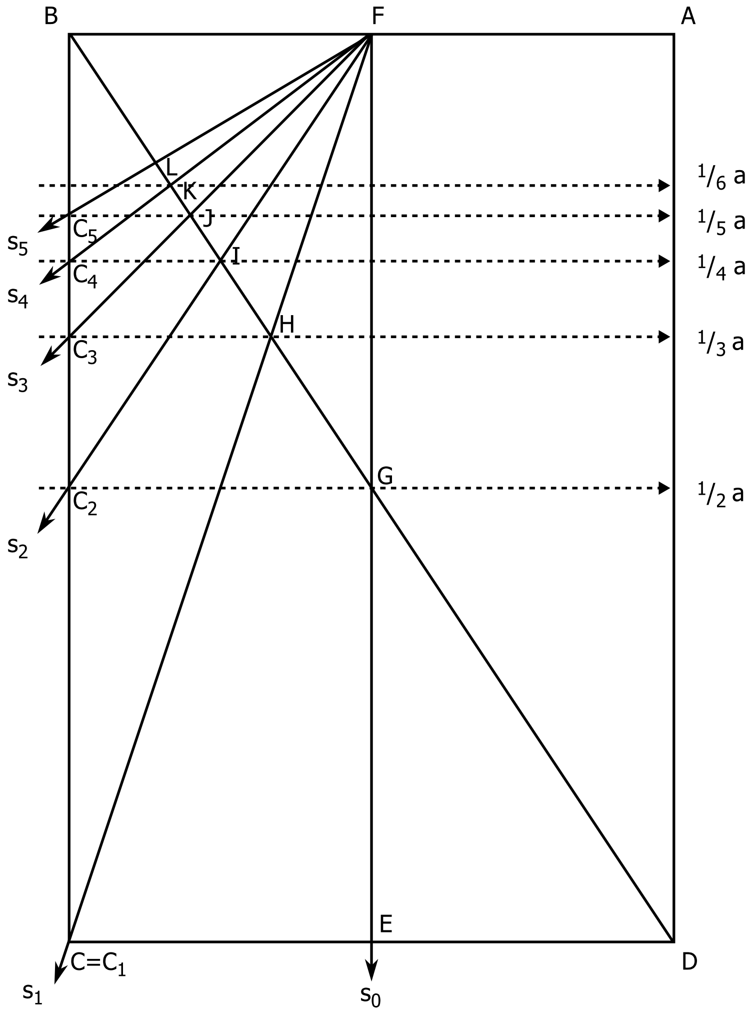
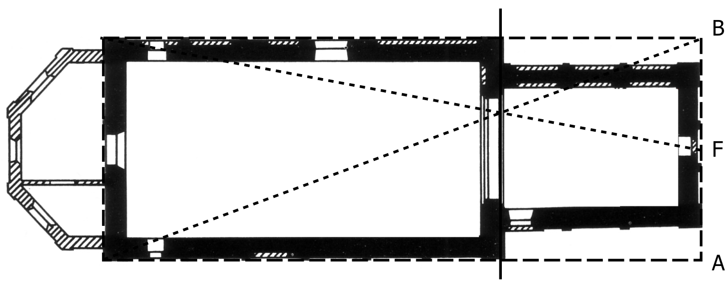


Fig. 7

Zentrum	Parallelen-Abschnitte	Verhältnis der Abschnitte	Zahl der Teile von a	ein Teil
H	FG, BC_1	a/2 : a = 1/2 = 1:2	3	$^1/_3$
I	FG, BC_2	a/2 : a/2 = 2/2 = 2:2	4	$^1/_4$
J	FG, BC_3	a/2 : a/3 = 3/2 = 3:2	5	$^1/_5$
K	FG, BC_4	a/2 : a/4 = 4/2 = 4:2	6	$^1/_6$
L	FG, BC_5	a/2 : a/5 = 5/2 = 5:2	7	$^1/_7$

Eine Anwendung



Die Abbildung zeigt den Grundriß der Stadtkirche in Jerichow. Genau drei Elemente – ein umbeschriebenes Rechteck, eine Rechteckdiagonale und eine Diagonale des langen Halbrechtecks – decken auf, daß sich Chorlänge und Saallänge wie 1:2 verhalten. Drei Chorlängen bestimmen die Länge des Gotteshauses.
Grundriß: Rolf Naumann, Original-Maßstab 1:50, Privatarchiv.