od-Nr. 110 www.ndrom.de
obiter dictum 08/2020

Verfasser: Hans-Peter Bodenstein

Zwei Grundregeln, romanische Gotteshäuser zu entwerfen

Romanische Kirchen treten uns als Saalkirchen oder Basiliken entgegen. Bei beiden ist die Bauwerkslänge (BwX) eindeutig. Bei Saalkirchen und Langhausbasiliken bestimmt der Turm die Bauwerksbreite (BwY), sofern dieser breiter als der Saal bzw. das Langhaus ist. Fehlt ein Turm oder Westbau oder ist dieser eingezogen, so bestimmen der Saal bzw. das Langhaus die Bauwerksbreite. Zu jedem der angesprochenen Gotteshäuser läßt sich in der Horizontebene ein Rechteck der Länge BwX und der Breite BwY denken, auf dem die Kirche steht. Bei Saalkirchen und Langhausbasiliken kann die Sakristei aus diesem Rechteck herausragen, so wie bei Querhausbasiliken die Querhausarme. Abbildungen 1 und 2 verdeutlichen das Gesagte.

Das fragliche Rechteck (rot) heißt Grundrechteck. Dessen Seitenverhältnis

BwX : BwY = i : j

ist das Grundverhältnis. Hierin stehen i und j für bestimmte natürliche Zahlen. Für die oben genannten Typen romanischer Kirchen gilt stets die Grundregel

$2 < i : j < 3$,

d.h., die Bauwerkslänge ist größer als die doppelte Bauwerksbreite und zugleich kürzer als die dreifache Bauwerksbreite. Aus Messungen an zahlreichen Gotteshäusern fördert die mathematische Analyse folgende Grundverhältnisse zutage

i : j wie {13:6, 11:5, 9:4, 7:3, 12:5, 5:2, 13:5, 21:8, 8:3, 11:4}.

Unter diesen Grundverhältnissen befinden sich die Fibonacci-Quotienten zweiter Art (FQ2.A)

Ψ wie {5:2, 13:5, 21:8, 8:3}.

(Ψ … griechischer Buchstabe »Psi«)

Die restlichen bezeichnen wir als Elementar-Quotienten.

E wie {13:6, 11:5, 9:4, 7:3, 12:5, 11:4}

(E … griechischer Buchstabe »Eta«)

Die Frage ist: Welche Überlegungen könnten zu der Grundregel $2 < i : j < 3$, nach der romanische Kirchen entworfen wurden, geführt haben?

Die Antwort des Verfassers lautet:

Die wunderbaren Eigenschaften der Fibonacci-Folge und deren Quotienten wurden in ihrer Vieldeutigkeit und Symbolträchtigkeit zum (ästhetischen) Maß romanischen Bauens. Das Wissen hierüber, das die Intellektuellen des Mittelalters bewahrten und weiterentwickelten, wurde an den Kloster- und Domschulen in den Sieben Freien Künsten vermittelt.

Was ist die Fibonacci-Folge?

Es handelt sich um eine Abfolge von Zahlen, die nach dieser Vorschrift zu bilden ist:

a) Die erste Zahl ist eine Eins.

b) Die zweite Zahl ist eine Eins.

c) Die dritte Zahl und alle folgenden Zahlen ergeben sich als Summe der beiden zuletzt gebildeten Zahlen.

Gemäß c) entstehen

1+1 = 2
1 + 2 = 3
2 + 3 = 5
3 + 5 = 8
5 + 8 = 13
usw.

Mithin lauten die Zahlen der Fibonacci-Folge in der richtigen Reihenfolge

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

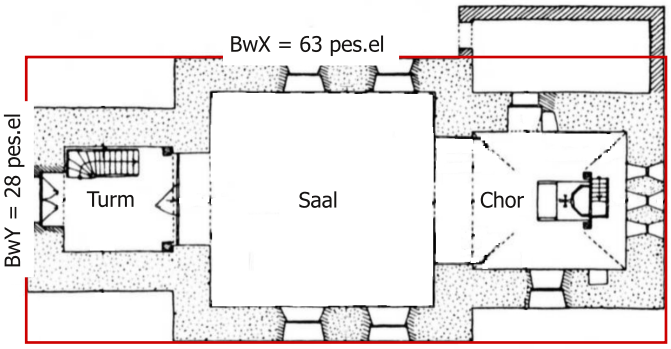

Abb. 1: Grundriß der Feldsteinkirche in Döllnitz. Saalkirche. Nord oben. Grundverhältnis i : j = 9:4, Grundmaß g = 7 pes.el (Eltenfuß ... 1 pes.el = 0.323 m), Grundrechteck rot.

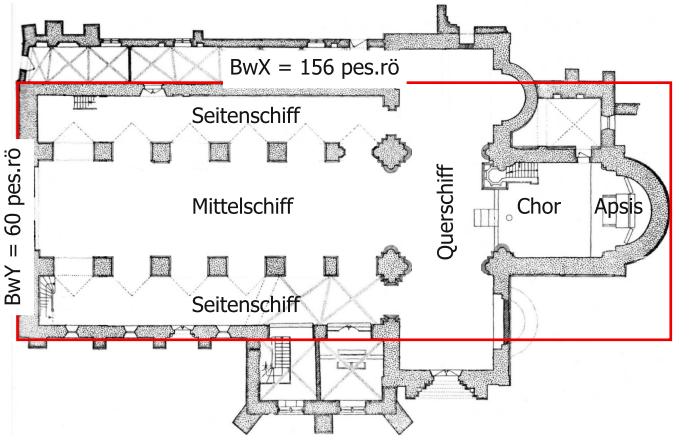

Abb. 2: Grundriß der Backsteinbasilika in Arendsee. Nord oben. Grundverhältnis i : j = 13:5, Grundmaß g = 12 pes.rö (römischer Fuß ... 1 pes.rö = 0.296 m), Grundrechteck rot. Südseitig späterer Emporenanbau. Nordseitig Kreuzgang.

Am Anfang stehen zwei Einsen, aus denen sich alle weiteren Zahlen durch Addition ergeben. Das Christentum legt der Eins größten Wert bei. So heißt es beispielsweise im Epheserbrief (4, 5-6): „Ein Herr, eine Taufe, ein Gott und Vater aller."

Welche Eigenschaften besitzen Fibonacci-Quotienten erster Art (Φ) und zweiter Art (Ψ)?

(Φ … griechischer Buchstabe »Phi«)

• Fibonacci-Quotienten erster Art (FQ1.A) •

– hier mit Φ bezeichnet – sind, siehe Fibonacci-Folge,

Φ wie {3:2, 5:3, 8:5, 13:8, 21:13, 34:21, …}.

Rechtecke mit diesem Seitenverhältnis sind sog. Goldene Rechtecke.

Eigenschaft 1 (E1)

Je weiter rechts die FQ1.A in ihrer natürlichen Abfolge stehen, um so näher kommt ihr Wert der Zahl

$(1 + \sqrt{5}) : 2 = 1.618034...$

Beispiel:

Φ = 8:5 = 1.6000000 und Φ = 34:21 = 1.6190476...

Aus diesem Grunde ist Φ geeignet, den Goldenen Schnitt, der ursprünglich eine Strecke mit Zirkel und Lineal in spezieller Weise teilt (s. Abb. 3), in Zahlen zu erfassen, wodurch dieser in Architekturentwürfen leichter anwendbar wird. Die kleinen Abweichungen gegenüber $(1 + \sqrt{5}) : 2$ verlieren sich in der Bauausführung.

Aus E1 folgt
Eigenschaft 2 (E2)
Für FQ1.A gilt stets $1 < \Phi < 2$.

Eigenschaft 3 (E3) – eine geometrische Analogie
Sofern von einem Goldenen Rechteck ein Quadrat abgeschnitten wird, bleibt ein (kleineres) Goldenes Rechteck übrig.

Somit wohnt jedem Goldenen Rechteck eine virtuelle Flächenteilung in Quadrat und Rechteck inne, das seinerseits wiederum das Seitenverhältnis Φ aufweist. Dieses mag der Grund dafür gewesen sein, romanische Kapellen – hierunter verstehen wir kleine einräumige Gotteshäuser – auf Goldenen Rechtecken zu errichten, womit sich das Grundverhältnis $i : j$ mit der Eigenschaft $1 < i : j < 2$ einbürgerte, das für romanische Kapellen zur Grundregel wurde.

Zugleich eröffneten die geometrischen Zusammenhänge Möglichkeiten für symbolische Verknüpfungen. Auf dem Quadrat, welches das Himmlische Jerusalem versinnbildlicht, fand die christliche Gemeinde ihren Platz, und auf dem verbliebenen Goldenen Rechteck, welches die Harmonie der göttlichen Schöpfung verkörpert, stand der gemauerte Altar, bestehend aus Stipes und Mensa.

Der Wertebereich von Seitenverhältnissen für Grundrechtecke unter Kapellen kann über FQ1.A hinaus erweitert werden, indem mit den elementaren Symbolzahlen 3, 4, 5, 6, 7 Quotienten gebildet werden, welche der Grundregel $1 < i : j < 2$ ebenfalls genügen. An Kapellen konnten hiervon bisher

{11:7, 9:5, 11:6, 13:7}

nachgewiesen werden. Wie diese gebildet wurden, liegt auf der Hand.

$11:7 = (2 \cdot 7 - 3) : 7$ (3 weniger als das Zweifache von 7)
$9:5 = (2 \cdot 5 - 1) : 5$ (1 weniger als das Zweifache von 5)
$11:6 = (2 \cdot 6 - 1) : 6$ (1 weniger als das Zweifache von 6)
$13:7 = (2 \cdot 7 - 1) : 7$ (1 weniger als das Zweifache von 7)

Diese Rechenbeispiele verraten, daß man darauf aus war, Grundverhältnisse zu bestimmen, die, so wie Fibonacci-Quotienten erster Art, die Grundregel

$1 < i : j < 2$

nicht verletzten.

Über Grundrißentwürfe hinaus wurden auch Aufrisse nach Goldenen Rechtecken entworfen, was sich besonders schön an der Chorturmkirche von Hämerten zeigt. Abbildung 4 gibt einen Eindruck hiervon. Eine ausführliche Darstellung hierzu enthält die Arbeit des Verfassers „Kirche Hämerten" in: obiter dictum Nr. 95, 2018, www.ndrom.de.

• Fibonacci-Quotienten zweiter Art (FQ2.A) •
– hier mit Ψ bezeichnet – sind, siehe Fibonacci-Folge,

Ψ wie {5:2, 8:3, 13:5, 21:8, 34:13, 55:21, …}.

Rechtecke mit diesem Seitenverhältnis sind sog. Fibonacci-Rechtecke.

Eigenschaft 4 (E4)
Für FQ2.A gilt stets $2 < \Psi < 3$.

E4 ist die Grundregel $2 < i : j < 3$ für romanische Kirchen.

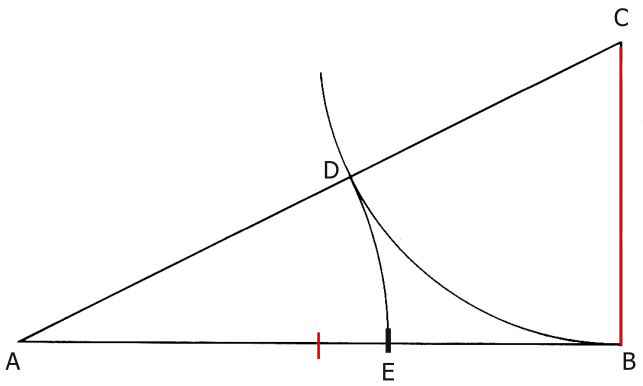

Abb. 3: Konstruktion des Punktes E, der die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.

Gegeben:	Strecke AB.
Konstruktion:	1) Lot in B gleich der Hälfte von AB. 2) Ziehe C A. 3) Kreis um C mit BC als Radius. 4) Kreis um A mit AD als Radius.
Ergebnis:	E teilt AB im Verhältnis des Goldenen Schnitts, d. h. AB : AE = AE : EB.

So schriftlich niedergelegt von Euklid (325 - 265 v. Chr.).

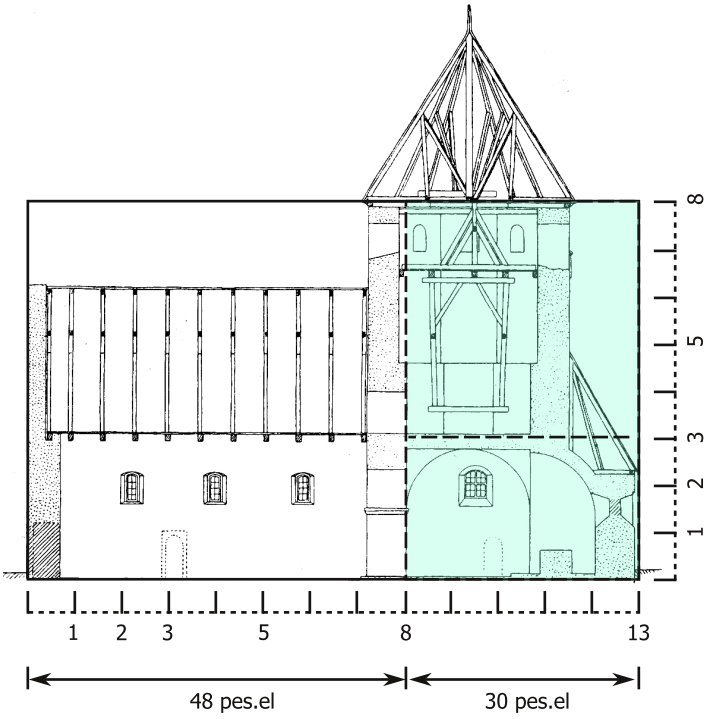

Abb. 4: Aufriß der Chorturmkirche zu Hämerten im Goldenen Rechteck mit Grund- und Höhenskale. Die Skaleneinheit beträgt 6 pes.el. Das ist hier der Strichabstand.

E4 ergibt sich aus E5, die den Zusammenhang zwischen Ψ und Φ formuliert.

Eigenschaft 5 (E5)
$\Phi + 1 = \Psi$

Beispiele:
Wenn $\Phi = 5:3$, so $(5:3) + 1 = (5:3) + (3:3)$
$= 8:3 = \Psi$.
Wenn $\Phi = 13:8$, so $(13:8) + 1 = (13:8) + (8:8)$
$= 21:8 = \Psi$.

Aus E5 folgt E6, was wiederum E4 erklärt, wobei auf E1 zurückgegriffen wird.

Eigenschaft 6 (E6)
Die geordnete Abfolge der FQ2.A strebt gegen die Zahl
$((1 + \sqrt{5}) : 2) + 1 = 1.618034... + 1 = 2.618034...$

Daß $2 < \Psi < 3$ im Mittelalter zur Grundregel für den Entwurf von Kirchengrundrissen wurde, hat noch einen weiteren Grund, in dem sich das ewige Streben nach einem gottgefälligen Leben abbildet. Es handelt sich um das Konvergenzverhalten der Abfolge $\Psi + 1/\Psi$, die gegen Drei strebt, und die Zahl Drei ist das Symbol für Trinität (Vater, Sohn, heiliger Geist).

Veranschaulichung dieser Konvergenz:
$\Psi + 1/\Psi$ wie {5:2 + 2:5, 8:3 + 3:8, 13:5 + 5:13,
21:8 + 8:21, 34:13 + 13:34,
55:21 + 21:55, ...}
und in Dezimalzahlen wiedergegeben
$\Psi + 1/\Psi$ wie {2.9, 3.041667, 2.9846154, 3.0059524,
2.9977376, 3.0008658, ...}

Auf der Grundlage von E6 läßt sich dieser Sachverhalt auch so darstellen:

$$2.618034... + 1/2.618034... = 3$$

Eigenschaft 7 (E7) – geometrische Analogie
Sofern von einem Fibonacci-Rechteck ein Quadrat abgeschnitten wird, bleibt (ebenfalls) ein (kleineres) Goldenes Rechteck übrig.

Diese Eigenschaft ist die Umkehrung von E5, denn
wenn $\Psi = \Phi + 1$, so ist $\Psi - 1 = \Phi$.

Der Wertebereich von Seitenverhältnissen für Grundrechtecke unter Kirchen kann über FQ2.A hinaus erweitert werden, indem mit den elementaren Symbolzahlen 3, 4, 5, 6, 7 Quotienten gebildet werden, welche der Grundregel $2 < i : j < 3$ ebenfalls genügen. An Kirchen konnten hiervon bisher {13:6, 11:5, 9:4, 7:3, 12:5, 11:4} nachgewiesen werden (s. o.). Wie diese aus elementaren christlichen Symbolzahlen gebildet wurden, liegt auch hier auf der Hand.

13:6 = (2•6 + 1) : 6 (1 mehr als das Zweifache von 6)
11:5 = (2•5 + 1) : 5 (1 mehr als das Zweifache von 5)
9:4 = (2•4 + 1) : 4 (1 mehr als das Zweifache von 4)
7:3 = (2•3 + 1) : 3 (1 mehr als das Zweifache von 3)
12:5 = (2•5 + 2) : 5 (2 mehr als das Zweifache von 5)
11:4 = (2•4 + 3) : 4 (3 mehr als das Zweifache von 4)

Diese Rechenbeispiele verraten, daß man darauf aus war, Grundverhältnisse zu bestimmen, die, so wie Fibonacci-Quotienten zweiter Art, die Grundregel $2 < i : j < 3$ nicht verletzen.

Arithmetik und Musik –
die ersten beiden Disziplinen des Quadriviums der Sieben Freien Künste.

Abgesehen davon, daß die ersten sechs Zahlen der Fibonacci-Folge auch als Nummern von Tönen auf der Naturtonreihe gelesen werden können, wobei sich Oktave (2:1), Quinte (3:2), große Sexte (5:3) und kleine Sexte (8:5) zu erkennen geben, vermittelt die Geometrie des Rundbogens eine weitere Möglichkeit der logischen Verknüpfung von Fibonacci-Arithmetik mit Musiktheorie.

Abbildung 5 stellt dar, wie sich die Gestalt des Rundbogens aus einem Halbkreis und einem Rechteck, das wir hier Kämpferrechteck nennen, zusammensetzt. Diese romanische Urform bestimmt das Aussehen von Triumphbögen, Portalen und Fenstern sowie von Tonnengewölben romanischer Gotteshäuser.

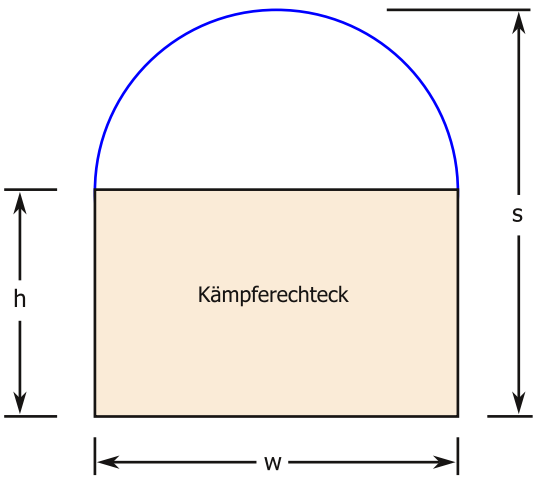

Abb. 5: Gestalt des Triumphbogens in der Feldsteinkirche von Vielbaum in der Wische. Modul m = 6 palmus.ha (Havelberger Fuß pes.ha = 0.3111 m, 1 palmus = ¼ pes).
Maßverhältnisse:
s : w = 9 : 8 (Ganzton) und h : w = 5 : 8 (Goldenes Rechteck).
Maße:
Lichte Scheitelhöh = 9•6 palmus.ha = 54 palmus.ha = 13½ pes.ha,
Lichte Weite = 8•6 palmus.ha = 48 palmus.ha = 12 pes.ha,
Höhe der Kämpferlinie = 5•6 palmus.ha = 30 palmus.ha = 7½ pes.ha.

In dem Zusammenhang bezeichnen wir die Maßzahl der lichten Scheitelhöhe des Rundbogens mit s, die Maßzahl von dessen lichter Weite mit w und die Maßzahl der Höhe des Kämpferrechtecks mit h (s. Abb. 5). Als Maßeinheit kann palmus (Handbreit, 1 palmus = ¼ pes) gelten. Zwei Beispiel mögen erhellen, worum es geht.

Beispiel 1: Sofern das Weitenverhältnis s : w dem Verhältnis der Schwingungszahlen von zwei Tönen entspricht, die ein Ganzton-Intervall hervorbringen (s : w = 9:8), entsteht als Kämpferrechteck ein Goldenes Rechteck (h : w = 5:8).

Beispiel 2: Sofern das Weitenverhältnis s : w = 5:2 beträgt, also ein FQ2.A ist, entsteht ein Kämpferrechteck mit dem Seitenverhältnis h : w = 2:1, wie wir es auch als Schwingungsverhältnis von Tönen kennen, die eine Oktave zum Erklingen bringen. Und von der Oktave hieß es im Mittelalter: „octavus sanctos omnes docet esse beatos" (die Oktave lehrt alle Heiligen, glückselig zu sein).
In dieser Weise zugeschnitten ist die Maueröffnung vom Chor in die Sakristei bei der Sandauer Langhausbasilika, deren Maßverhältnisse nahezu alle aus der Fibonacci-Folge kommen.

Beide Beispiele vermitteln einen Eindruck von der künstlerischen Faszination, die für mittelalterliche Intellektuelle, voran die Werkmeister (Baumeister, Architekten) romanischer Kirchen, von den Strukturvarianten ausgegangen sein muß, die einen Rundbogen im Innersten ausmachen.

Zusammenfassung – Vorläufige Begründung

Erster Sachverhalt
Romanische Kirchen stehen auf Grundrechtecken, deren Seitenverhältnis i : j zwischen 2 und 3 liegt.
Es gilt $2 < i : j < 3$.

Zweiter Sachverhalt
Romanische Kapellen stehen auf Grundrechtecken, deren Seitenverhältnis i : j zwischen 1 und 2 liegt.
Es gilt $1 < i : j < 2$.

Beide Sachverhalte finden ihre Begründung in der frühen Verwendung von Fibonacci-Quotienten in den Entwürfen für eine ideale und symbolträchtige bauliche Gestalt romanischer Gotteshäuser. Die einzelnen mathematischen Gründe hierfür sind oben dargelegt worden.

So wie Fibonacci-Quotienten erster und zweiter Art verschiedene Äußerungen ein und derselben Zahlenfolge sind, so sind Kirchen und Kapellen Häuser in verschiedener Gestalt für den einen Gott.

Den frühesten Hinweis hierauf liefert die mathemarische Architekturanalyse des Grundrisses der Abteikirche Cluny II, die 954/55 gegründet wurde. Diese Querhausbasilika steht auf einem Goldenen Rechteck, das die Querhausachse in ein westlich von dieser gelegenes Quadrat und ein östlich gelegenes Goldenes Teilrechteck zerlegt, auf dem das Sanktuarium seinen Platz findet. Abbildung 6 gibt die Situation wieder. Um diese Zeit scheint die Unterscheidung zwischen den zwei Sachverhalten nach Bauwerkstypen noch nicht gefallen zu sein.

Etwa zeitgleich beginnt im Jahre 957 in Magdeburg die Errichtung des ottonischen Doms, dessen Entwurf das Grundverhältnis i : j = 11:4 vorsieht, einen Elementar-Quotienten, welcher der notwendige Bedingung $2 < 11:4 < 3$ genügt. Dies wiederum zeigt, daß es in der Mitte des 10. Jhs. bereits etablierte Entwurfsregeln mathematischer Art gegeben haben muß. Bei dem ottonischen Dom handelte es sich um eine kreuzförmige Basilika.

In der nördlichen Altmark und im Elbe-Havel-Winkel hat der Verfasser bisher 39 Saalkirchen und 10 Kapellen untersucht. Diese Gotteshäuser sind im letzten Drittel des 12. Jhs. oder im ersten Viertel des 13. Jhs. entworfen und errichtet worden.

Von diesen 39 Saalkirchen besitzen

11 das Grundverhältnis 5:2,
5 das Grundverhältnis 8:3,
7 das Grundverhältnis 13:5.

Mithin stehen 59% der untersuchten Kirchen auf Fibonacci-Grundrechtecken.

Auf die übrigen Kirchen verteilen sich Elementar-Quotienten wie folgt:

2 mit Grundverhältnis 13:6,
4 mit Grundverhältnis 9:4,
6 mit Grundverhältnis 7:3,
2 mit Grundverhältnis 12:5,
2 mit Grundverhältnis 11:4.

Während 13:6 zu einem sehr gedrungenen Kirchenbau führt, erzeugt 11:4 einen länglichen. Fibonacci-basierte Bauten liegen dazwischen (s. E6).

Von den 10 Kapellen besitzen

1 das Grundverhältnis 5:3,
2 das Grundverhältnis 8:5,
1 das Grundverhältnis 13:8.

Mithin stehen 40% der untersuchten Kapellen auf Goldenen Rechtecken.

Auf die übrigen Kapellen verteilen sich Elementar-Quotienten wie folgt:

1 mit Grundverhältnis 11:7,
1 mit Grundverhältnis 13:8,
1 mit Grundverhältnis 11:6,
3 mit Grundverhältnis 13:7.

Während 11:7 zu einem Grundrechteck führt, das gedrungener als ein Goldenes Rechteck erscheint, erweisen sich Grundrechtecke mit dem Seitenverhältnis 13:7 deutlich schlanker als diese.

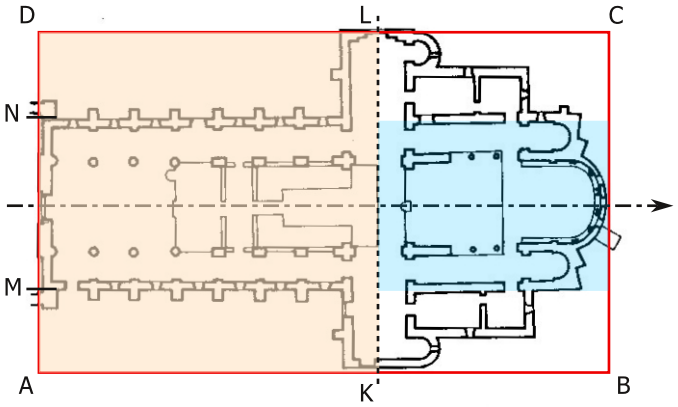

Abb. 6: Grundriß (Rekonstruktion) der Abteikirche Cluny II.
Grundrechteck ABCD mit dem Seitenverhältnis i : j = 13:8 bezüglich 13 pes.ul. 1 pes.ul = 0.288 m (Ulrich-Fuß).
Quadrat AKLD mit der Seite AK = 8·13 pes.ul
Goldenes Rechteck KBCL mit der kurzen Seite KB = 5·13 pes.ul
und der langen Seite BC = 8·13 pes.ul

Aufschlußreich ist auch ein Blick auf die kreuzförmigen Basiliken in der fraglichen Region. In der eingefügten Auflistung bezeichnen die Jahreszahlen das Gründungsjahr, d. h. den Moment des Ausschnürens des Grundrisses. Und hierbei handelt es sich in allen Fällen um den Erstentwurf, wenn dieser später um einen Westbau erweitert wurde, wie zum Beispiel in Jerichow, Brandenburg oder Diesdorf.

Jerichow, Kloster (1146)	11:5,
Brandenburg, Dom (1164)	13:5,
Seehausen, St. Petri (1171)	9:4,
Osterburg, St. Nicolai (um 1170)	5:2,
Tangermünde, St. Stephani (1184)	21:8,
Lehnin, askan. Hauskloster (1184)	21:8,
Arendsee, Kloster (1188)	13:5,
Stendal, askan. Stiftskirche (1188)	21:8,
Diesdorf, Kloster (1193)	5:2.

Bis auf die Basiliken in Jerichow und Seehausen sind alle Grundverhältnisse Fibonacci-Quotienten zweiter Art. Diese machen einen Anteil von 78% aus, was angesichts der Bedeutung dieser Gotteshäuser nicht überrascht. Aus Konvergenzgründen (s. S. 3, oben) ist 21:8 symbolisch hochrangiger als 5:2, was in den Entwürfen markgräflicher Gründungen (Lehnin, Tangermünde, Stendal) als Stilmittel benutzt wird.

Fazit

Zwei Dinge fallen auf.
Die Dominanz der Entwürfe mit Fibonacci-Quotienten und die breite Fächerung der Elementar-Quotienten, sofern diese zur Anwendung gelangen.

Nach entsprechenden Untersuchungen an den kreuzförmigen Basiliken in Hirsau (i : j = 13:5) und Alpirsbach (i : j = 8:3), beide im Schwarzwald gelegen, möchte der Verfasser den Ausgangspunkt der aufgedeckten Architekturkonvention für romanische Gotteshäuser, die ihren Ausdruck in $2 < i : j < 3$ und $1 < i : j < 2$ findet, in der Benediktinerabtei Cluny des 10 Jhs. sehen. Hier war wohl das ganzheitliche Erleben von Christsein, Kunst und Handwerk in einer Weise ausgeprägt, die als clyniazensische Lebensform überzeugte und deshalb weite Verbreitung fand.