

Verknüpfte Architektur-Merkmale

Am 19.12.2019 schrieb mir Herwig Brätz:

„Die große Altarplatte in der Krypta des Brandenburger Doms misst 1,43 m x 1,83 m, also 2,618 m² (was aber bei jeder Fußmessung verborgen bleibt).

1,83/1,43=1,27 entspricht der Wurzel aus Phi.“

Dieser höchst bemerkenswerte Befund regte mich zu Überlegungen an, denen ich hier einführende Bemerkungen zur Fibonacci-Folge und zum Goldenen Schnitt voranstellen möchte, um auch dem mathematisch unvorbereiteten Leser den Zugang in die Gedankenwelt des ma. Werkmeisters, der den Brandenburger Dom entworfen hat, zu erleichtern. Offensichtlich beherrschte dieser die arithmetischen wie auch die geometrischen Aspekte der Fibonacci-Folge und des Goldenen Schnitts.

Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge – wohlgerneht Lehrstoff an den Kloster- und Domschulen des Mittelalters – lautet

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 usw.

Jede dieser Zahlen ist die Summe ihrer beiden Vorgänger. Die Folge hat kein Ende.

Quotienten von benachbarten Folgengliedern, wie

5:3 8:5 13:8 usw.,

bezeichnen wir als Fibonacci-Quotienten 1. Art (FQ1.A). Rechtecke mit derartigen Seitenverhältnissen sind Goldene Rechtecke.

Quotienten, wie

5:2 8:3 13:5 usw.

– ein Folgenglied wird jeweils übersprungen –, bezeichnen wir als Fibonacci-Quotienten 2. Art (FQ2.A). Sehr viele romanische Kirchen sind auf einem Rechteck mit einem derartigen Seitenverhältnis errichtet. Wir nennen es Fibonacci-Rechteck.

Fibonacci (1170-1250) kannte diese Zahlenfolge und wendete sie in seinen mathematischen Abhandlungen an. Mitte des 19. Jhs. erfolgt die heute übliche Namensverknüpfung.

Goldener Schnitt

Teilt Punkt T die Strecke AB derart (s. Abb. 2), daß

$$\Phi \cdot AT = TB \quad \text{und} \quad \Phi \cdot TB = AB,$$

so beträgt

$$\Phi = 1.618033988749894...$$

oder ganz genau

$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) : 2.$$

Diese Teilung heißt Goldener Schnitt.

Φ – in Lautschrift Phi – entspricht dem ersten Buchstaben im Namen Phidias. Phidias (490-430 v. Chr.) war ein griechischer Bildhauer und Mathematiker, der bei der Leitung des Parthenonbaus assistierte. Er soll den Goldenen Schnitt schon auf seine Skulpturen angewandt haben.

Φ besitzt die Eigenschaft

$$\Phi = 1 + 1/\Phi \quad (\text{Gestalt A}),$$

die sich auch in Gestalt

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (\text{Gestalt B})$$

darstellen läßt.

Fibonacci-Quotienten 1. Art verhalten sich ganz ähnlich wie Φ . Diese Ähnlichkeit wird immer besser, je größer die Zahlen sind, aus denen der FQ1.A gebildet ist.

Überlegung 1

Wir wählen den FQ1.A 8:5 aus und schreiben $\Phi \approx 8:5$.



od-Nr. 103 www.ndrom.de

obiter dictum 01/2020

Verfasser: Hans-Peter Bodenstern



Abb. 1: Brandenburger Dom.

(Luftbild-Kopie aus <http://s3.germany.travel>, 06.01.2020)

Zunächst (aus Gründen, die noch deutlich werden) überprüfen wir die Eigenschaft in Gestalt B.

$$\Phi^2 \approx (8:5) \cdot (8:5) = 64:25 \approx 13:5$$

bzw.

$$\Phi + 1 = (8:5) + 1 = (8:5) + (5:5) = 13:5$$

13:5 ist aber ein FQ2.A.

Ergebnis 1

Die Eigenschaft von Φ (in Gestalt B) lehrt, wie aus einem FQ1.A ein FQ2.A zu gewinnen ist. Entweder durch Quadrieren oder durch Addieren von Eins. Letzteres kann wie folgt geometrisch interpretiert werden.

Aus einem Goldenen Rechteck entsteht durch Ansetzen eines Quadrats an dessen kurzer Seite ein sog. Fibonacci-Rechteck, hier mit dem Seitenverhältnis $i : j = 13:5$.

Überlegung 2

Gibt es Zahlenverhältnisse, deren Quadrat (näherungsweise) Φ , d. h. einen FQ1.A, ergeben?

Versuchen wir es mit $a : b = 9:7$. Dessen Quadrat ist

$$(a : b)^2 = 81:49.$$

Wenn dieses Verhältnis ein FQ1.A ist, so müßten wir in der Fibonacci-Folge

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 usw.

fündig werden.

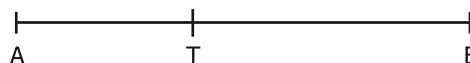


Abb. 2: Punkt T teilt die Strecke AB im Goldenen Schnitt.

Offensichtlich liegen die Quadratzahlen 81 und 49 ganz in der Nähe des 11ten und 10ten Folgengliedes. Näherungsweise gilt demzufolge

$$89:55 \approx 81:49.$$

Lassen wir uns hierauf ein, so machen wir einen (relativen) Fehler, der kleiner als 2.2% ist. Mit Blick auf eine handwerkliche Übertragung von Abmessungen, die im Verhältnis 9:7 stehen, auf einen Werkstoff, reicht die erlangte Genauigkeit hin.

Oder elementar, einfach und treffend

$$81/49 \approx 8 \cdot 10 / 5 \cdot 10 = 8/5 = 8:5.$$

Ergebnis 2

In moderner Wurzelschreibweise dargestellt, können wir

$$a : b = 9:7 \approx \sqrt{\Phi}$$

gelten lassen, zumal mit Blick auf eine bauliche Umsetzung in romanische Architektur.

Die oben dargelegten arithmetischen und geometrischen Zusammenhänge bilden die Grundlage des ersten romanischen Entwurfs¹ des Brandenburger Domes.

Die mathematische Architekturanalyse (mAA) des Verfassers hat ergeben:

Die Basilika steht (ohne Westwerk) auf einem Grundrechteck mit dem Seitenverhältnis

$$i : j = 13:5 \approx \Phi + 1 \quad (\text{Grundverhältnis}).$$

13:5 ist ein FQ2.A.

Der zugehörige Grundwert beträgt

$$g = 14 \text{ pes.ka},$$

wobei 1 pes.ka = 0.333 m (Karolinger-Fuß).

Folglich mißt die Basilika laut Entwurf in der

$$\text{Länge} = 13 \cdot 14 \text{ pes.ka} = 182 \text{ pes.ka}$$

und in der

$$\text{Breite} = 5 \cdot 14 \text{ pes.ka} = 70 \text{ pes.ka}$$

(s. Abb. 3).

Aus diesem Grundverhältnis folgt, daß der Werkmeister seinem Entwurf den FQ1.A 8:5 zugrunde gelegt hat, denn

$$(8:5) + 1 = 13:5$$

(s. Überlegung 1).

Für die Zahlen Acht und Fünf sprechen die auf Christus bezogenen Inhalte, die diesen zugeordnet sind.

Neben seiner Bedeutung als FQ1.A stellt 8:5 das Schwingungsverhältnis der Töne auf der Naturtonreihe dar, die die kleine Sexte erklingen lassen. 8:5 ist gewissermaßen eine »Schnittmenge« von Fibonacci-Folge und Naturtonreihe.

Bei dieser Gesinnung des Werkmeisters nimmt es nicht Wunder, daß er der Mensa – das ist die Natursteinplatte auf dem gemauerten Altarblock – das Seitenverhältnis 9:7 (s. Überlegung 2, Ergebnis 2) gegeben hat. Darüber hinaus hat er den Grundwert g' der Mensa möglicherweise gerade so bestimmt, daß die Fläche der Mensa in der Einheit Quadratmeter die Maßzahl $\Phi + 1$ bekommt. Diese beiden Erkenntnisse gehen aus den Befunden von Herwig Brätz (s. o.) hervor. Wie kann letzteres erdacht sein?

Der Werkmeister wählte für den Grundwert g' zu

$$g' = 8 \text{ uncia.st.}$$

(12 uncia = 1 pes; 1 pes.st = 0.305 m, Staufer-Fuß)

Mithin erhielt die Mensa die

$$\text{Länge} = 9 \cdot 8 \text{ uncia.st} = 72 \text{ uncia.st} = 1.83 \text{ m}$$

und die

$$\text{Breite} = 7 \cdot 8 \text{ uncia.st} = 56 \text{ uncia.st} \approx 1.42 \text{ m.}$$

Mit diesen Seiten mißt die Fläche der Mensa

$$A = 28 \text{ pes.st}^2 \approx 2.605 \text{ m}^2 \approx (\Phi + 1) \text{ m}^2.$$

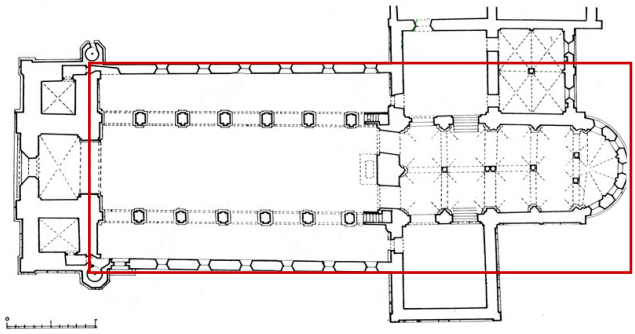


Abb. 3: Grundriß² des Brandenburger Doms mit Grundrechteck (rot), dessen Seiten sich wie 13:5 verhalten.

Dem Werkmeister war daran gelegen, die Flächengröße der Mensa (Tisch des Herrn) mit einer vollkommenen Maßzahl auszustatten, was ihm mit 28 gelang, denn 28 ist eine vollkommene Zahl. Einer vollkommenen Zahl ist eigen, daß diese sich als Summe ihrer natürlichen Teiler darstellen läßt, wie hier

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Die Konsequenzen seiner Festlegungen für die Eigenschaften der Maßzahl in der Einheit Quadratmeter waren für den Werkmeister nicht zu überblicken, da er die Längeneinheit Meter nicht kannte. Der Schluß von 28 pes.st² auf $(\Phi + 1) \text{ m}^2$ war einem ma. Werkmeister nicht möglich. Während Seitenverhältnisse von Maßeinheiten unabhängig sind, enthalten Flächeninhaltsangaben stets den Faktor Flächenmaßeinheit. Und diese konnte im Mittelalter, bezogen auf Fuß, Elle oder Klafter, sehr verschieden ausfallen.

Zusammenfassung

- Die Gestalt der Mensa und die Gestalt des Grundrisses der Basilika sind miteinander verknüpft. Das verbindende Konstrukt ist der FQ1.A 8:5. Diesen zeichnen besondere Symbolzahlen (Fünf und Acht) und die Verbindung zur Harmonie (kleine Sexte) der Naturtonreihe aus.
- Mittelalterliche Werkmeister waren in den Sieben Freien Künsten, wozu Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie zählen, ausgebildet und im christlichen Glauben zu Hause.
- Die dargelegten Zusammenhänge sprechen dafür, daß im Entwurf der Brandenburger Basilika zuerst kein Westbau vorgesehen war.
- Die hier analysierte Mensa war, da die Krypta erst später eingesenkt wurde, zunächst Bestandteil des Hauptaltars im Chor der Basilika.
- Die Auseinandersetzung mit dem eingangs zitierten Befund von Herwig Brätz zeigt zweierlei.

Was romanische Architektur im Innersten ausmacht, sind mathematische Strukturen, die der Werkmeister hineingedacht hat.

Wie der »moderne« Architekturanalytiker diese Strukturen interpretiert, ist bisweilen auch eine Frage des persönlichen Standpunkts.

¹ Bodensten, Hans-Peter (2015), Grundrißentwurf des Brandenburger Doms, in: obiter dictum od-Nr. 63, Seehausen (Altmark).

² Wolfram Bleis (2011), Das Geländeprofil am Brandenburger Dom zu Beginn des Dombaus im 12. Jh., in: obiter dictum od-Nr. 21, Seehausen (Altmark).